Existência e unicidade de solução para equações diferenciais abstratas com impulsos dependentes do estado

Katia Azevedo

Universidade de São Paulo

kandreia@ffclrp.usp.br

Resumo

Nós estudamos a existência e unicidade de solução fraca (mild solution) e solução clássica para equações diferenciais abstratas impulsivas, onde os momentos de impulsos são pré -fixados e dependem de retardos que também dependem do estado.

Introdução

Este trabalho é motivado pelo artigo [2], onde é estudado estabilidade para sistemas de edo's não lineares com impulsos com retardos dependendo do estado. Como citado pelos autores em [2], este tipo de problema é motivado por aplicações que surgem em controle de doenças, dinâmica de populações, teoria de controle, entre outros.

Consideramos o seguinte problema abstrato de equações diferenciais com retardo e impulsos

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t), u(\gamma(t))), \quad t \neq t_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

$$u(t_i^+) = g_i(u(\sigma_i(u(t_i^+)))), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2}$$

$$u_0 = \varphi \in C([-p, 0]; X), \tag{3}$$

onde $A : D(A) \subset X \mapsto X$ é o gerador de um semigrupo analítico de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ definidos em um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N < t_{N+1} = a$ são números pré-fixados e $g_i : X \mapsto X$, $f : [0, a] \times X \times X \mapsto X$, $\gamma : [0, a] \mapsto [-p, a]$ e $\sigma_i : X \mapsto [-p, a]$, $i = 1, \ldots, N$, são funções que satisfazem as hipóteses listadas a seguir.

Notações

- $C(J, Z)$ é o espaço das funções contínuas de J em Z com a norma usual $\|\cdot\|_{C(J,Z)}$;
- $C_{Lip}(J, Z)$ é o espaço das funções Lipschitz com a norma $\|\cdot\|_{C_{Lip}(J;Z)} = \|\cdot\|_{C(J;Z)} + [\cdot]_{C_{Lip}(J;Z)}$, onde $[\zeta]_{C_{Lip}(J;Z)} = \sup_{t,s\in J, t\neq s} \frac{\|\zeta(s)-\zeta(t)\|_Z}{|t-s|}$;
- $\mathcal{PC}(Z)$ é o conjunto das funções limitadas $u : [0, a] \mapsto Z$ contínuas em $t \neq t_i$, $u(t_i^-) = u(t_i)$ e $u(t_i^+)$ existe para todo $i = 1, \cdots, N$, com a norma $\|u\|_{\mathcal{PC}(Z)} = \max_{i=0,1,\ldots,N} \|u\|_{C((t_i,t_{i+1}];Z)}$;
- $\mathcal{BPC}(Z)$ é o conjunto de todas as funções $u : [-p, a] \mapsto Z$ tais que $u_{|_{[-p,t_1]}} \in C([-p, t_1]; Z)$ e $u_{|_{[0,a]}} \in \mathcal{PC}(Z)$;
- $\mathcal{PC}_{Lip}(Z)$, é o conjunto das funções $u \in \mathcal{PC}(Z)$ tais que $u_{|_{(t_i,t_{i+1}]}} \in C_{Lip}((t_i, t_{i+1}]; Z)$ para todo $i = 0, 1, \ldots N$, com a norma $\|u\|_{\mathcal{PC}_{Lip}(Z)} = \max_{i=0,1,\ldots,N} \|u_{|_{(t_i,t_{i+1}]}}\|_{C_{Lip}((t_i,t_{i+1}];Z)}$;
- $\mathcal{BPC}_{Lip}(Z)$ é o espaço formado por todas as funções $u : [-p, a] \mapsto Z$ tais que $u \in \mathcal{BPC}(Z)$, $u_{|_{[-p,0]}} \in C_{Lip}([-p, 0]; Z)$ e $u_{|_{[0,a]}} \in \mathcal{PC}_{Lip}(Z)$,com a norma $\|u\|_{\mathcal{BPC}_{Lip}(Z)} = \max\{\|u_{|_{I_i}}\|_{C_{Lip}(I_i;Z)} : i = -1, 0, \ldots, N\}$, onde $I_{-1} = [-p, 0]$.

Hipóteses

(H_γ) $\gamma \in C_{Lip}([0, a]; [-p, a])$, existe uma função $k : \{1, \ldots, N\} \mapsto \{-1, 0, \ldots, N\}$ tal que $\gamma(I_i) \subset I_{k(i)}$ e $k(i) \leq i$ para todo i.

(H_{σ_i}) Existe uma função $q : \{1, \ldots, N\} \mapsto \{-1, 0, 1, \ldots, N\}$ tal que $q(i) \leq i$ e $\sigma_i \in C(X, I_{q(i)})$ para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$.

($\mathrm{H}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{g,X}}$) $g_i \in C_{Lip}(X; W)$ e $\mathcal{C}_{X,W}(g_i) = \|g_i\|_{C(X;W)} < \infty$, $i \in \{1, \ldots, N\}$.
$L_{Z,W}(g_i)$ denota a constante de Lipschitz de $g_i(\cdot)$,
$L_{Z,W}(g) = \max_{i=1,\ldots,N} L_{Z,W}(g_i)$ e $\mathcal{C}_{Z,W}(g) = \max_{i=1,\ldots,N} \mathcal{C}_{Z,W}(g_i)$.

(H_f) $f \in C_{Lip}([0, a] \times X \times X; X)$, L_f denota a constante de Lipschtiz de $f(\cdot)$ e $C_X(f) = \|f\|_{C([0,a]\times X\times X;X)} < \infty$.
$b = \max_{i=1,\ldots,N}(t_{i+1} - t_i)$,
$i_c : W \mapsto X$ é a transformação inclusão ,
$\Lambda_{X,W} = \max\{\|AT(\cdot)\|_{L^\infty([0,b],\mathcal{L}(W,X))}, C_0\|i_c\|_{\mathcal{L}(W,X)}\}$ e

$$\Phi_{X,W} = \Lambda_{X,W}\mathcal{C}_{X,W}(g) + C_0(C_X(f) + bL_f)+ \tag{4}$$

$$[T(\cdot)\varphi(0)]_{C_{Lip}([0,a];X)} + [\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X)} \tag{5}$$

Resultados Principais

Definição de solução fraca: Uma função $u \in \mathcal{BPC}(X)$ é chamada uma solução fraca do sistema abstrato se $u_0 = \varphi$, $u(t_i^+) = g_i(u(\sigma_i(u(t_i^+))))$ para todo $i = 1, \ldots, N$ e

$$u(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-\tau)f(\tau, u(\tau), u(\gamma(\tau)))d\tau, \quad t \in [0, t_1],$$

$$u(t) = T(t-t_i)g_i(u(\sigma_i(u(t_i^+)))) + \int_{t_i}^t T(t-\tau)f(\tau, u(\tau), u(\gamma(\tau)))d\tau \quad \forall t \in (t_i, t_{i+1}],\ i = 1, \ldots, N.$$

Definição de solução clássica: Uma função $u \in \mathcal{BPC}(X)$ é chamada uma solução clássica do sistema abstrato se $u_0 = \varphi$, $u(t_i^+) = g_i(u(\sigma_i(u(t_i^+))))$ para todo $i = 1, \ldots, N$ e $u(\cdot)$ satisfaz a equação diferencial.

Teorema1: Assuma que as condições H_γ, H_{σ_i}, $\mathrm{H}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{g,X}}$ e H_f estão satisfeitas, $T(\cdot)\varphi(0) \in C_{Lip}([0, a]; X)$ e $\varphi \in C_{Lip}([-p, 0]; X)$. Então existe uma única solução clássica $u \in \mathcal{BPC}_{Lip}(X)$ de (1)-(3) desde que

$$2C_0 bL_f(3 + [\gamma]_{C_{Lip}}) + \Lambda_{X,W} L_{X,W}(g)(1 + 4\max_{j=1,\ldots,N}[\sigma_j]_{C_{Lip}}\Phi_{X,W}) < 1.$$

Teorema 2: Assuma que as condições H_γ and H_{σ_i} estão satisfeitas, existe um espaço de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y) \hookrightarrow (X, \|\cdot\|)$ tal que $\|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \to 0$ quando $t \to 0$, $g_i \in C(X; Y)$ para todo i, $f \in C([0, a] \times X \times X; X)$, as funções $g_i(\cdot), f(\cdot)$ são limitadas e $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto. Então existe uma solução fraca do problema (1)-(3).

Esses teoremas são demonstrados usando teoremas de ponto fixo. O primeiro teorema é demonstrado usando o Teorema do ponto fixo de Banach e o segundo usando o Teorema do ponto fixo de Schauder.

Problema: a função $u \mapsto g_i(u(\sigma_i(u(t_i^+))))$ não é, em geral, Lipschitz. Para contornarmos este problema, trabalhamos em espaços envolvendo funções Lipschitz e consideramos o seguinte lema, baseado em [1], essencial para as demonstrações:

Lema: Assuma que as condições H_γ , H_{σ_i} estão satisfeitas, $u, v \in \mathcal{BPC}_{Lip}(X)$ e $u_0 = v_0$. Então $u(\gamma(\cdot)) \in \mathcal{PC}_{Lip}(X)$, $[u(\gamma(\cdot))]_{\mathcal{PC}_{Lip}(X)} \leq [u]_{\mathcal{BPC}_{Lip}(X)}[\gamma]_{C_{Lip}}$ e

$$\|u(\sigma_i(u(t_i^+))) - v(\sigma_i(v(t_i^+)))\| \leq (1 + [v]_{\mathcal{BPC}_{Lip}(X)}[\sigma_i]_{C_{Lip}})\|u - v\|_{\mathcal{PC}(X)}$$

Referências

[1] E. Hernandez, M. Pierri, and J. Wu. $c^{1+\alpha}$-strict solutions and well-posedness of abstract differential equations with state dependent delay. *J. Differential Equations*, 261(12):6856–6882, 2016.

[2] X. Li and J. Wu. Stability of nonlinear differential systems with state-dependent delayed impulses. *Automatica J. IFAC*, (64):63–69, 2016.

Agradecimentos: FAPESP