Um Convite à homologia simplicial

Crislaine Kuster

Universidade Federal do Espírito Santo

crislainekeizy@gmail.com

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Introdução

A homologia simplicial surge como uma maneira de estudar os espaços topológicos cujas componentes estruturais são n-simplexos, análogos aos triângulos n-dimensionais. Assim sendo, ela formaliza a ideia de "buracos" de uma dada dimensão em um complexo simplicial.

Objetivos

O objetivo desse projeto é introduzir conceitos iniciais da teoria de homologia, com isso, apresentar os grupos de homologia da esfera $\mathbb{S}^n$ e demonstrar consequências deste resultado.

Para começar...

Seja $A = \{a_0, ..., a_n\}$ um conjunto geometricamente independente em $\mathbb{R}^n$ definimos o **n-simplexo** gerado por A, denotado por $[a_0, a_1, \cdots a_n]$, como o conjunto $\{x \in R^N;$

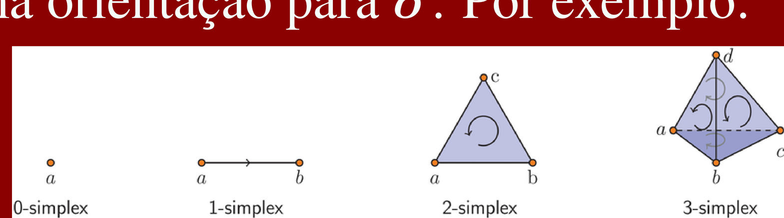
$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i \,, \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \ , e \ \ t_i \geq 0 \ \forall \ i\}.$$

Um **complexo simplicial** K $\subset \mathbb{R}^N$ é uma coleção de simplexos onde:

$i)$ Toda face de um simplexo de K está em K.

$ii)$ A intersecção de quaisquer dois simplexos em K é uma face de cada um.

Um **simplexo orientado** é um simplexo σ junto com uma orientação para σ. Por exemplo:



Dado K um complexo simplicial, definimos uma p-**cadeia** pela combinação linear formal

$$x = \sum x_i s_i \text{ onde } x_i \in \mathbb{Z}$$

e s_i são os p-simplexos de K com a relação $s + (-s) = 0$. Daí o grupo livre gerado por todas p-cadeias, $C_p(K)$, é chamado de **grupo das p-cadeias orientadas de K.**

Seja $\sigma = [v_0, v_1, \cdots, v_p]$ um simplexo orientado, operador bordo ∂_p é definido linearmente em seus simplexos por

$$\partial_p : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$$

$$\partial_p\sigma = \textstyle\sum_{i=0}^{p}(-1)^i[v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_p]$$

Seja $Z_p(K)$ o grupo dos p-ciclos definido pelo núcleo do homomorfismo ∂_p e seja $B_p(K)$ o grupo dos p-bordos,$B_p(K)$, a imagem de ∂_{p+1}.

A partir da definição bordo podemos concluir que $\partial_p\partial_{p-1} = 0$ e assim segue que $B_p(K) \lhd Z_p(K)$.

Desse modo, definimos o p-ésimo grupo de homologia de K pelo quociente:

$$H_p(K) := \frac{Z_p(K)}{B_p(K)}$$

Resultados

Os grupos de Homologia de $\mathbb{S}^1$

Considere T o triângulo formado pelos 1-simplexos: $[v_0, v_2], [v_2, v_1], [v_1, v_0]$ (figura 1).

Para calcular os grupos de homologia de $\mathbb{S}^1$ basta calcular os grupos de homologia de T pois T é a triangularização de $\mathbb{S}^1$.

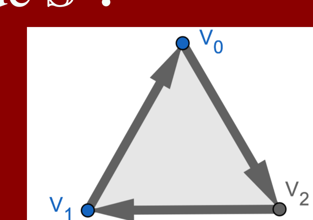


Figura 1: T

Como não temos nenhum n-simplexo $n \geq 2$, $H_n(\mathbb{S}^1) \cong 0 \ n \geq 2$.

O grupo $Z_1(T)$ é gerado por

$$\omega = [V_0, V_2] + [V_2, V_1] + [V_1, V_0]$$

logo $Z_1(T) \cong \mathbb{Z}$. Ademais T não tem 2-simplexos assim $B_1(T) \cong 0$ e daí

$$H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Note que $Z_0(T) = C_0(T)$ e a aplicação dado por

$$\psi : C_0(T) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x = \sum x_i a_i \mapsto \sum x_i$$

é um homomorfismo sobrejetor, cujo núcleo é $B_0(T)$. Logo $H_0(\mathbb{S}^1) = \frac{Z_0(T)}{B_0(T)} \cong \mathbb{Z}$.

Os grupos de Homologia de $\mathbb{S}^n$

Com o intuito de calcular tais grupos recorremos à uma ferramenta da homologia singular:

A Sequência de Mayer-Vietoris

Sejam X um espaço topológico e U, V abertos de X tais que $X = int(U) \cup int(V)$.
Então a sequência de Mayer-Vietoris de (U, V) é a seguinte sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow H_p(U \cap V) \longrightarrow H_p(U) \oplus H_p(V)$$
$$\longrightarrow H_p(X) \longrightarrow H_{p-1}(U \cap V) \cdots$$

✓ Podemos incluir $\mathbb{S}^{n-1}$ em $\mathbb{S}^n$, o "equador" de S^n, com os pontos da forma $(x_1, \cdots, x_n, 0)$.

✓ Sejam z, z' polos norte e sul de $\mathbb{S}^n$ então $\mathbb{S}^n - \{z\}, \mathbb{S}^n - \{z'\}$ e $\mathbb{R}^n$ são homeomorfos. Decomponha

$$\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^n - \{z\}) \cup (\mathbb{S}^n - \{z'\}).$$

✓ Dado que $\mathbb{S}^{n-1}$ é retrato por deformação de $\mathbb{R}^n - \{\text{origem}\}$, obtemos a sequência de Mayer-Vietoris

$$H_m(\mathbb{R}^n) \oplus H_m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{h_*} H_m(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\Psi}$$
$$H_{m-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{g_*} H_{m-1}(\mathbb{R}^n) \oplus H_{m-1}(\mathbb{R}^n)$$

✓ Para $m > 1$, os termos finais são nulos e por propriedades de sequência exata, Ψ é um isomorfismo. Logo

$$H_m(\mathbb{S}^n) \cong H_{m-1}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

✓ Para $m = 1$ e $n > 1$, g_* e Ψ são todos injetivos logo $H_1(\mathbb{S}^n) \cong 0$. Assim com os grupos de homologia de $\mathbb{S}^1$ indutivamente podemos concluir que

$$H_k(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se} \quad k = 0, n \\ \{0\} & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Teorema. *Não há retração de $\mathbb{D}^n$, bola unitária fechada em $\mathbb{R}^n$, em $\mathbb{S}^{n-1}$.*

Demonstração. Suponha que $f : D^n \to S^{n-1}$ seja uma retração, $n \geq 2$. Com isso, fatoramos a identidade como composição de dois homomorfismos em um grupo nulo, o qual é impossível:

$$\begin{tikzcd} & H_{n-1}(\mathbb{D}^n) \arrow[d, "f_*"] \\ H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[r, "Id"'] & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \end{tikzcd}$$

Para $n = 1$ segue direto de D^1 ser conexo e S^0 não.

□

Teorema. *(do ponto fixo de Brower) Seja f : $\mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}$ uma função contínua. Então existe um ponto $x \in \mathbb{D}$ tal que $f(x) = x$.*

Demonstração. Se não existir ponto fixo de f podemos definir $F : \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ que associa $x \in \mathbb{D}^n$ a intersecção de S^{n-1} com o seguimento de reta $\overrightarrow{[f(x), x]}$ (figura 3). Assim F é uma retração, contrariando o teorema anterior.

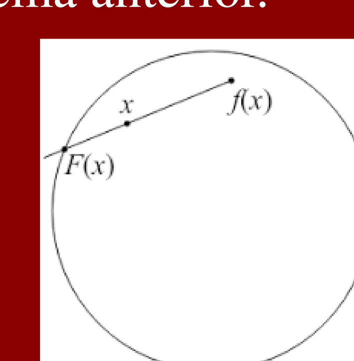


Figura 2: Teorema do ponto fixo de Brower

□

Teorema. *$\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ não são homeomorfos $(m \neq n)$.*

Demonstração. Suponha que exista um homeomorfismo h entre $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, daí h é um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^n - \{0\}$ e $\mathbb{R}^m - \{h(0)\}$. Com isso, $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\mathbb{S}^{m-1}$ são homotopicamente equivalentes, Contudo, isso não pode ser verdade, pois temos
$0 \cong H_{n-1}(\mathbb{S}^{m-1}) \ncong H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$. □

Conclusão

Concluímos que, através dos grupos de homologias de S^n, obtemos muitos resultados interessantes da topologia algébrica.

Referências

[1] MUNKRES, J. R., *Elements of Algebraic Topology*, New York. Addison-Wesley Publish Company, Inc., 1984.

Agradecimentos

Agradeço a minha orientadora Carolina de Miranda e Pereiro pelo apoio e pela dedicação em nossos estudos e também ao CNPq pelo apoio financeiro.