

Grupos de Homologia da Esfera e do Toro

Amanda Melo & Marcelo Moreira

Universidade Federal de Alfenas

amandademelosouza@gmail.com

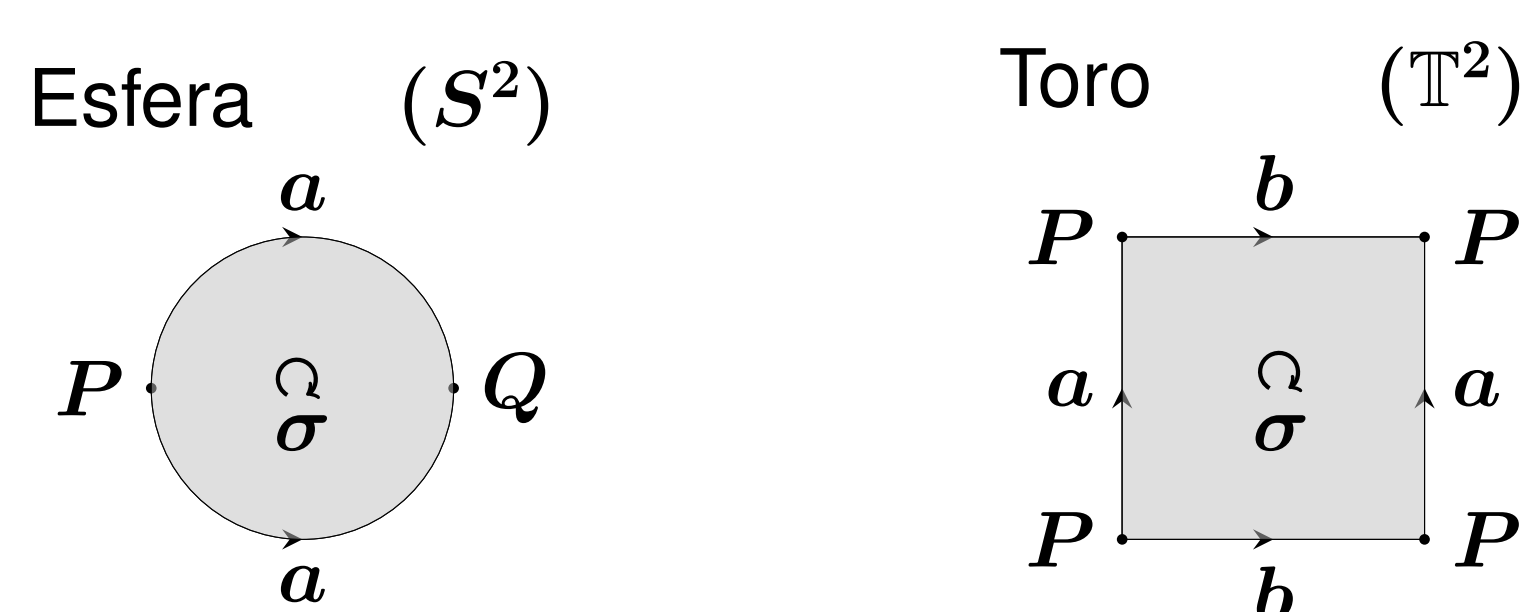
marcelo.moreira@unifal-mg.edu.br



Resumo

A topologia algébrica estabelece uma ligação entre *topologia* e *álgebra*, em que são usadas as ferramentas da álgebra para resolver problemas de topologia e vice-versa. A topologia algébrica associa as propriedades dos objetos com grupos invariantes, por exemplo os *grupos de homotopia* e os *grupos de homologia*. Neste trabalho, os estudos concentram-se nos conceitos relativos a teoria de grupos e a topologia algébrica, tais como grupos, subgrupos, subgrupos normais, grupos abelianos livres, homomorfismos de grupos, grupos quocientes, espaços topológicos, homeomorfismos, n -células, n -cadeias, homomorfismo de bordos, a fim de definir e calcular os grupos de homologia da esfera e do toro.

É possível associar a esfera e o toro através de homeomorfismos com complexos celulares:



Teorema. Uma superfície é compacta se, e somente se, qualquer triangulação usa um número finito de triângulos.

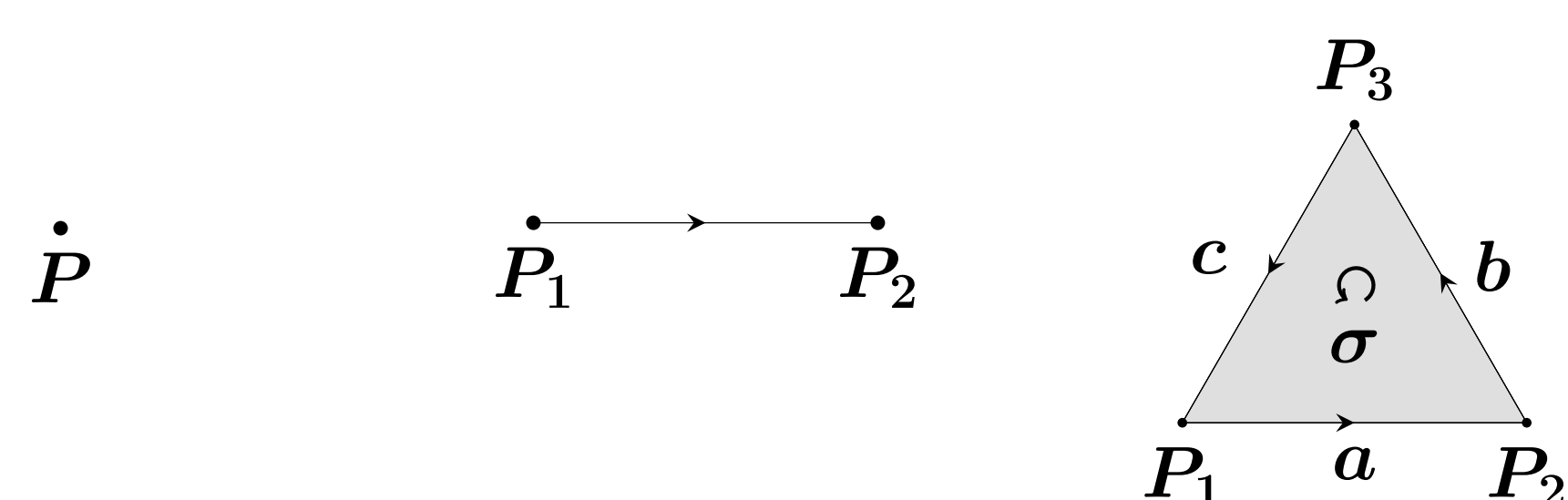
Pelo teorema acima é possível concluir que um espaço triangularizável em um número finito de simplexes tem um número finito de n -células, para $n = 0, 1$ e 2 . Portanto, o estudo usa essas n -células.

Os complexos celulares permitem o cálculo dos grupos de homologia de uma forma mais simplificada.

Células

Introduzindo a ideia de uma n -célula em \mathbb{R}^3 para $n = 0, 1$ e 2 . Uma **0-célula** é somente um ponto P . Uma **1-célula** é um segmento P_1P_2 visualizado como um caminho direcionado de P_1 à P_2 . Uma **2-célula** é um conjunto cujo interior é homeomorfo ao disco de dimensão 2.

Orientação de uma célula



Bordo de uma n -célula

Definição. Estabelecendo o **bordo de uma n -célula** para $n = 0, 1$ e 2 .

- Bordo de uma 0-célula: $\partial_0(P) = 0$
- Bordo de uma 1-célula: $\partial_1(P_1P_2) = P_2 - P_1$
- Bordo de uma 2-célula: $\partial_2(\sigma) = a + b + c$

Grupos Abelianos Livres

Definição. Seja X um subconjunto de um grupo abeliano não nulo G . Um grupo abeliano tem um conjunto gerador X que torna as condições equivalentes:

- Cada elemento não nulo a em G pode ser expressado unicamente na forma $a = n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_rx_r$ para $n_i \neq 0$ em \mathbb{Z} e x_i distintos em X .
- X gera G e $n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_rx_r = 0$ para n_i em \mathbb{Z} e x_i distintos em X se e somente se $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 0$.

é um **grupo abeliano livre** e X é uma base para o grupo.

Teorema. Se G é um grupo abeliano livre com a base de r elementos, então G é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ para r fatores.

Cadeias

Definição. Considera-se X um **complexo celular** se for um conjunto finito de células

$$X = \bigcup \{ \sigma : \sigma \text{ é uma célula} \}$$

tal que:

- $\sigma \in X$, então todas as células que compõe a fronteira de σ estão em X ;
- Se $\sigma, \tau \in X$, então $\text{Int } \sigma \cap \text{Int } \tau = \emptyset$.

O grupo abeliano livre gerado pelas n -células orientadas de X é chamado de grupo $C_n(X)$, em que cada elemento de $C_n(X)$ é chamado de **n -cadeia orientada**. Portanto, todo elemento de $C_n(X)$ é uma soma finita da forma $\sum_i m_i \sigma_i$, em que σ_i são n -células de X e $m_i \in \mathbb{Z}$. Para $n = -1$, denota-se $C_{-1}(X) = 0$.

Homomorfismo de bordos

Seja σ uma n -célula, $\partial_n(\sigma) \in C_{n-1}(X)$ para $n = 0, 1$ e 2 , dessa forma, define-se a aplicação ∂_n :

$$\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$$

Como $C_n(X)$ é livre abeliano e a aplicação ∂_n é definida nos geradores do grupo, ∂_n é um homomorfismo, chamado **homomorfismo de bordos**.

Dessa forma, define-se dois subgrupos de $C_n(X)$:

$$Z_n(X) = \text{Nuc}(\partial_n) \text{ e } B_n(X) = \text{Im}(\partial_{n+1})$$

Grupos Quocientes

Seja G um grupo e N um subgrupo normal em G . Dados $a, b \in G$, a associação $ab^{-1} \in N$ define uma relação de equivalência em G e $G/N = \{ \bar{a} : a \in G \}$ é o conjunto quociente de G por essa relação de equivalência em que $\bar{a} = Na = \{ na : n \in N \}$ é classe de equivalência módulo N tendo a como representante.

Proposição. Seja G um grupo e H um subgrupo normal de G . Então, para todo $a, b \in G$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$ define uma operação no conjunto das classes G/N e mais ainda G/N é um grupo com essa operação, chamado de **grupo quociente**.

Grupos de Homologia

Definição. O grupo quociente $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$ é o n -ésimo **grupo de homologia** de X .

Sendo assim, os grupos de homologia são:

Esfera (S^2)	Toro (\mathbb{T}^2)
$H_0(S^2) = Z_0(S^2)/B_0(S^2) \simeq \mathbb{Z}$	$H_0(\mathbb{T}^2) = Z_0(\mathbb{T}^2)/B_0(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}$
$H_1(S^2) = Z_1(S^2)/B_1(S^2) \simeq 0$	$H_1(\mathbb{T}^2) = Z_1(\mathbb{T}^2)/B_1(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$H_2(S^2) = Z_2(S^2)/B_2(S^2) \simeq \mathbb{Z}$	$H_2(\mathbb{T}^2) = Z_2(\mathbb{T}^2)/B_2(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}$
$H_3(S^2) = Z_3(S^2)/B_3(S^2) \simeq 0$	$H_3(\mathbb{T}^2) = Z_3(\mathbb{T}^2)/B_3(\mathbb{T}^2) \simeq 0$

Resultados

Teorema. Se o espaço X é um complexo com um número finito de células, então $H_0(X)$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ e o número de fatores de \mathbb{Z} é o mesmo número de componentes conexos de X .

Teorema. Se X é um espaço contrátil com um número finito de células, então $H_n(X) = 0$, para $n \geq 1$.

Teorema. Sejam Y e Z complexos celulares conexos com $Y \cap Z = \{Q\}$, para um ponto Q . Seja $X = Y \cup Z$. Então X é um complexo celular e

$$H_n(X) \simeq H_n(Y) \times H_n(Z), \quad n > 0$$

$$H_0(X) \simeq \mathbb{Z}, \quad n = 0$$

O espaço X é chamado *união por um ponto* e é denotado por $X = Y \vee Z$.

Dois esferas tangentes ($S^2 \vee S^2$)

$$H_0(S^2 \vee S^2) \simeq \mathbb{Z}$$

$$H_1(S^2 \vee S^2) \simeq 0$$

$$H_2(S^2 \vee S^2) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$H_3(S^2 \vee S^2) \simeq 0$$

Referências Bibliográficas

- FRALEIGH, J. B. **A First Course in Abstract Algebra**. Terceira edição. Delhi: Pearson Education, 2003.
- GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. Sexta edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.
- KINSEY, L. C. **Topology of Surfaces**. Primeira edição. New York: Springer, 1993.