Cw-expansividade, uma generalização do conceito de expansividade

Mayara Braz Antunes

Universidade Estadual de Campinas - IMECC

ra163508@ime.unicamp.br

Resumo

O conceito de homeomorfismos expansivos contribui com riqueza para área de sistemas dinâmicos sobretudo para dinâmica topológica. Existem vários exemplos que são, digamos, especiais, de homeomorfismos expansivos, como por exemplo os homeomorfismos de Anosov. Neste trabalho vamos introduzir e estudar um novo tipo de homeomorfismo chamados de homeomorfismos cw-expansivos. A noção de cw-expansividade é de certa forma uma generalização de expansividade de homeomorfismos.

Conceitos e resultados

Vamos assumir que (X,d) é um espaço métrico compacto. Lembrando que um homeomorfismo $f : X \to X$ é dito expansivo se existe $c > 0$ tal que a bola dinâmica

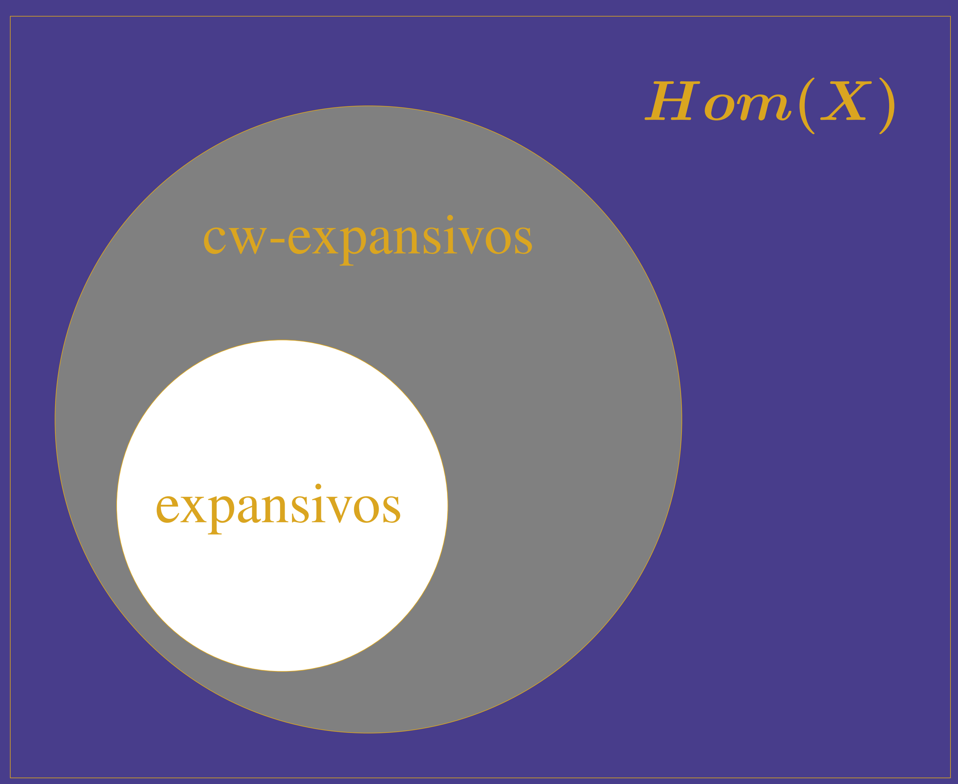
$$\Gamma_c(x) = \{y \in X \mid d(f^n(x), f^y) < c, \ \forall n \in \mathbb{Z}\} = \{x\}$$

para todo $x \in X$.

Definição 1. Um homeomorfismo $f : X \to X$ é chamado *cw-expansivo* se existe um número positivo $c > 0$ tal que se A é um subcontínuo (subconjunto compacto e conexo) não-degenerado de X então existe um número natural $n = n(A)$ tal que

$$\text{diam}(f^n(A)) > c \text{ ou } \text{diam}(f^{-n}(A)) > c,$$

onde $\text{diam}(Y) = sup\{d(x,y) \mid x, y \in Y\}$.



O conjunto dos homeomorfismos cw-expansivos contém o conjunto dos homeomorfismos expansivos, em outras palavras:

$$\text{expansividade} \Rightarrow \text{cw-expansividade}$$

A inclusão estrita dos homeomorfismos expansivos no conjunto dos homeomorfismos cw-expansivos pode ser vista pelo teorema a seguir.

Teorema 1. Seja $f : Z \to Z$ um homeomorfismo cw-expansivo definido em um espaço métrico compacto 0-dimensional Z, existe um homeomorfismo $g : X \to X$ de um espaço com certas propriedades X tal que g é um homeomorfismo cw-expansivo. (Vide [4])

Uma classe de homeomorfismo um pouco mais particular que os cw-expansivos é a dos positivamente cw-expansivos. Mais precisamente:

Definição 2. Dizemos que um homeomorfismo $f : X \to X$ é *positivamente cw-expansivo* se existe um número positivo $c > 0$ tal que se A é um subcontínuo (subconjunto compacto e conexo) não-degenerado de X então existe um número natural $n = n(A)$ tal que

$$diam(f^n(A)) > c.$$

Exemplo 1. (Solenóide) Considere a aplicação $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(z) = 2z \ (mod \ 1)$. Então o espaço de limite inverso (S^1, f) é o *solenóide* e o shift $\tilde{f} : (S^1, f) \to (S^1, f)$, $\tilde{f}((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (f(x_0), x_0, x_1, \ldots)$ é um homeomorfismo expansivo e também positivamente cw-expansivo.

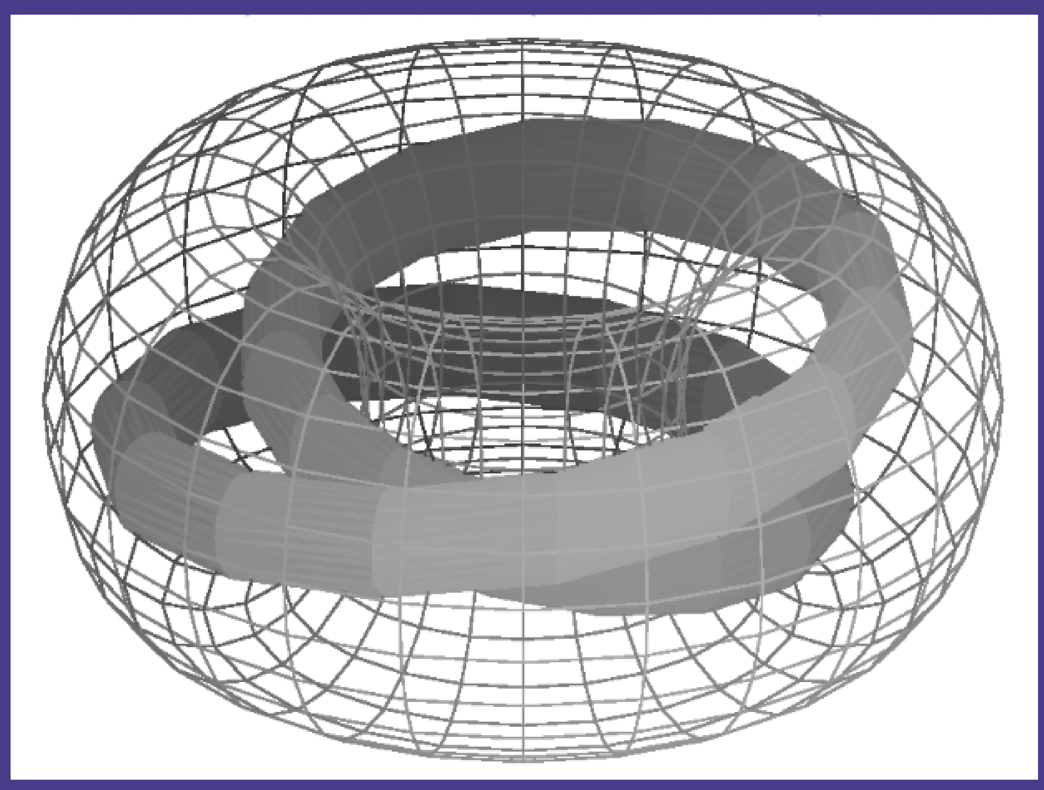


Figura 1: Solenóide - figura retirada de [2].

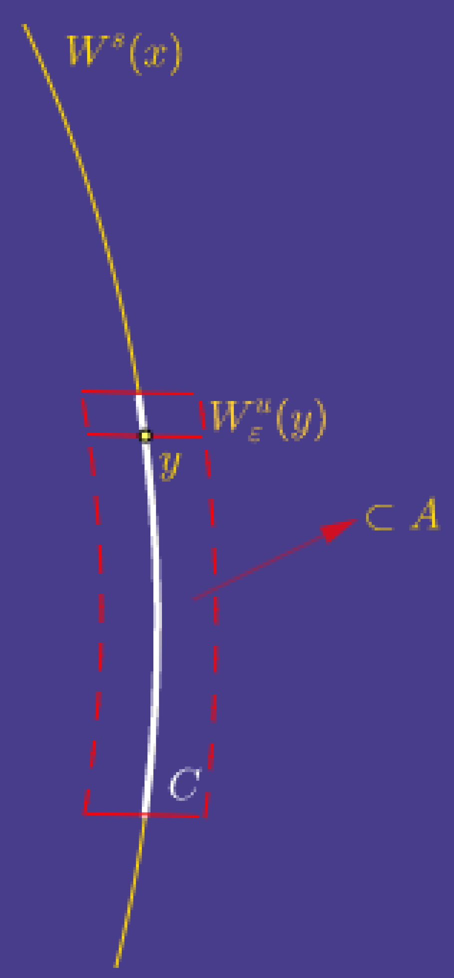
O solenóide é um exemplo de homeomorfismo expansivo que é também é positivamente cw-expansivo. Isto pode ser visto em [3, Teorema 3.11]. Sabemos que o solenóide é definido em um conjunto atrator hiperbólico.

Definição 3. Dado um homeomorfismo definido em um espaço métrico $f : X \to X$, para cada ponto $x \in X$ podemos definir os *conjuntos* *(ε-)estáveis* e *(ε-)instáveis* por:

- $W_\varepsilon^{s(u)}(x) = \{y \in X \mid d(f^{(-)n}(x), f^{(-)n}(y)) < \varepsilon, \ \forall n \in \mathbb{N}\}$
- $W^{s(u)} = \{y \in X \mid d(f^{(-)n}(x), f^{(-)n}(y)) \xrightarrow{n\to\infty} 0\}$.

Teorema 2. Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo e Λ um atrator hiperbólico para f contido no conjunto não errante $\Omega(f)$, f-invariante e de codimensão 1 (isto é, a folheação estável ou instável em tem dimensão 1), então $f|_\Lambda$ é positivamente ou $f^{-1}|_\Lambda$ é positivamente cw-expansivo.

Ideia da demonstração.
Suponha que $f|_\Lambda$ não é positivamente cw-expansiva, então dado $\delta > 0$, existe $C \subset \Lambda$ tal que $\text{diam}(f^n(C)) < \delta, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Considere $A = \bigcup_{x\in C} W_\varepsilon^u(x)$, onde ε é no máximo a constante de expansividade da f. Note que, $int(A) \neq \emptyset$ e $A \subset \Lambda$.
Teorema auxiliar.[1] Qualquer conjunto hiperbólico Λ de um difeomorfismo f contido em $\Omega(f)$, ou tem interior vazio, ou é a variedade toda.
Consequentemente, $int(\Lambda) \neq \emptyset$, o que contradiz o teorema.



Referências

[1] Flavio Abdenur, Christian Bonatti, and Lorenzo J. Díaz. Non-wandering sets with non-empty interiors. *Nonlinearity*, 17(1):175–191, 2004.

[2] Michael Brin and Garrett Stuck. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2015. Corrected paper back edition of the 2002 original [

[3] Hisao Kato. Concerning continuum-wise fully expansive homeomorphisms of continua. *Topology Appl.*, 53(3):239–258, 1993.

[4] Hisao Kato. Continuum-wise expansive homeomorphisms. *Canad. J. Math.*, 45(3):576–598, 1993.

Agradecimentos

Agradeço ao IMECC e ao meu orientado Professor Dr. Régis Varão por todo suporte acadêmico e pela grande oportunidade de estudar neste instituto que me proporciona um crescimento exponencial de minha vida profissional e do desenvolvimento da minha pesquisa e também agradeço a CAPES pela bolsa de doutorado a mim concedida.