DIFEOMORFISMOS DE ANOSOV

Marcielis Espitia Noriega[1]

Orientador: Gabriel Ponce[2]

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade de Campinas
Campinas-SP

Introdução

Neste trabalho apresentamos um tema muito importante em Sistemas Dinâmicos, que é a classe de difeomorfismos de Anosov.

Apresentaremos a definição, exemplos e propriedades interessantes tais como o fato de que todo difeomorfismo de Anosov no toro é topologicamente conjugado a um automorfismo hiperbólico do toro.

A hiperbolicidade de um sistema garante a existência de estruturas geométricas dinamicamente invariantes, como é o caso das folheações estável e instável, que são essenciais para a obtenção de propriedades métricas e ergódicas do sistema em questão. Neste poster, apresentaremos as definições destas estruturas bem como algumas propriedades por elas satisfeitas.

Conjuntos Hiperbólicos

Definição. Seja M uma variedade suave, $f : M \to M$ um difeomorfismo C^r, $r \geq 2$, um subconjuto compacto invariante $\Lambda \subset M$ é dito ***hiperbólico*** para f se existe uma métrica riemanniana chamada *métrica de Lyapunov* em uma vizinhança aberta U de Λ e números $0 < \lambda < 1 < \mu$ tal que para qualquer ponto $x \in \Lambda$ existe uma decomposição do espaço tangente $T_xM = E^s(s) \oplus E^u(x)$ satisfazendo:

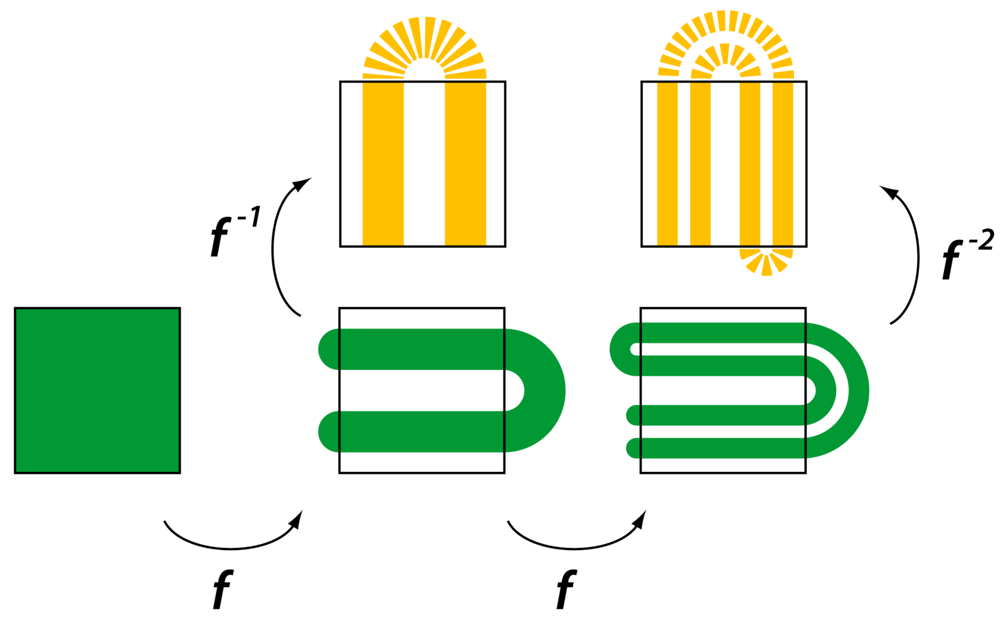
$$Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x)) \text{ e } Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x));$$

$$\|Df_x|_{E^s(x)}\| \leq \lambda < 1 < \mu \leq \|Df_x|_{E^u(x)}\|.$$

Os subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ são chamados de **direção estável** e **instável** de f respetivamente.

Proposição 1 A dimensão dos $E^s(x)$ e $E^u(x)$ é localmente constante e esses espaços dependem continuamente no x.

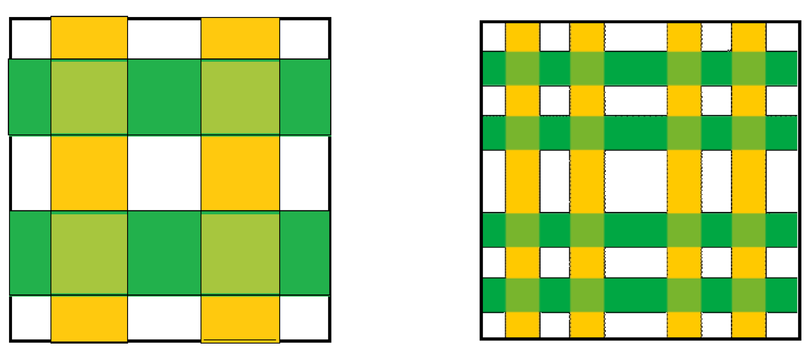
Exemplo: Um exemplo de um conjunto hiperbólico bem conhecido é a ***Ferradura de Smale***, construído por exemplo, tomando $Q = [0,1]^2$ (um retângulo em $\mathbb{R}^2$) e $f : Q \to \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo de Q sobre a sua imagem, agindo nele de forma que o quadrado é fortemente esticado na direção horizontal e comprimido na direção vertical, como mostra seguinte a figura;



https://en.wikipedia.org/wiki/Horseshoe_map

Note que $Q \cap f(Q)$ consiste de dois retângulos horizontais.

Agora para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $\Lambda_n = \bigcap_{n=-k}^{k} f^n(Q)$ a qual é união de 4^k quadrados, assim,



$\Lambda_1 = \bigcap_{n=-1}^{1} f^n(Q) = f^{-1}(Q) \cap Q \cap f(Q)$ $\qquad \Lambda_2 = \bigcap_{n=-2}^{2} f^n(Q)$

Definimos Λ como a interseção

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(Q)$$

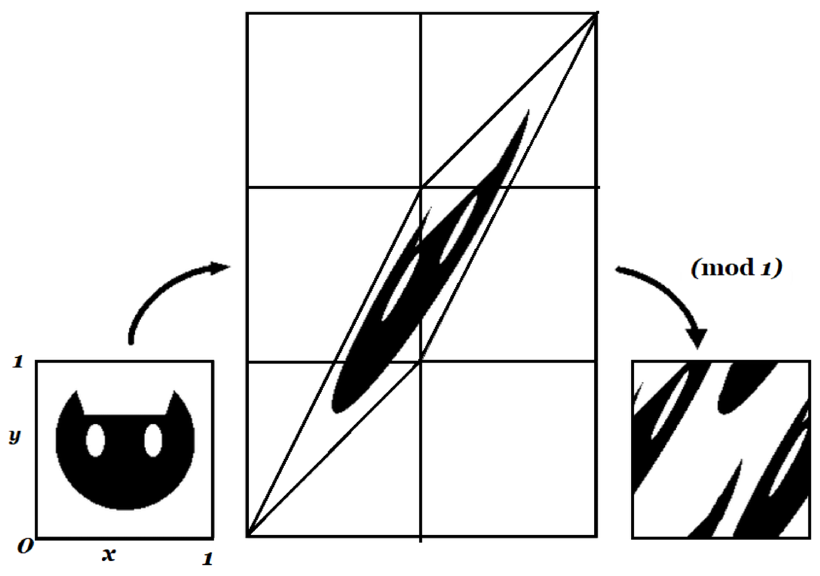
O conjunto Λ é chamado a Ferradura de Smale (para f).

Observação: Λ é um conjunto hiperbólico para f.
Λ é um conjunto de Cantor, em particular ele não possui pontos interiores nem pontos isolados.

Difeomorfismo de Anosov

Definição. Um difeomorfismo C^r, $f : M \to M$ é chamado ***difeomorfismo de Anosov*** se M é um conjunto hiperbólico para f.

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, a qual é hiperbólica, (i.e., $|\lambda| \neq 1$ para todo $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$), então A induz um difeomorfismo de Anosov $F_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ chamada de *Arnold's cat map.*



Teorema 1 [1]. Toda C^1-perturbação de um difeomorfismo de Anosov é um difeomorfismo de Anosov.

Teorema 2 [1]. Todo difeomorfismo de Anosov C^1, $f : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$ é topologicamente conjugado a um automorfismo linear hiperbólico.

Teorema 3 [2]. Seja $f : M \to M$ difeomorfismo de Anosov C^1, então as distribuições estável e instável, E^s e E^u são Hölder contínuas, i.e, existem $\theta > 0$ e $D > 0$ tal que para todo $x, y \in M$

$$\text{dist}(E^s(x), E^s(y)) \leq D \cdot \text{dist}(x,y)^\theta$$

Variedades estável e instável

Teorema 4 [1]. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov C^1, para cada $x \in M$, existe um par de C^1- discos mergulhados, $W^s_{loc}(x), W^u_{loc}(x)$, chamados variedade estável e instável local de x, respetivamente, tais que:

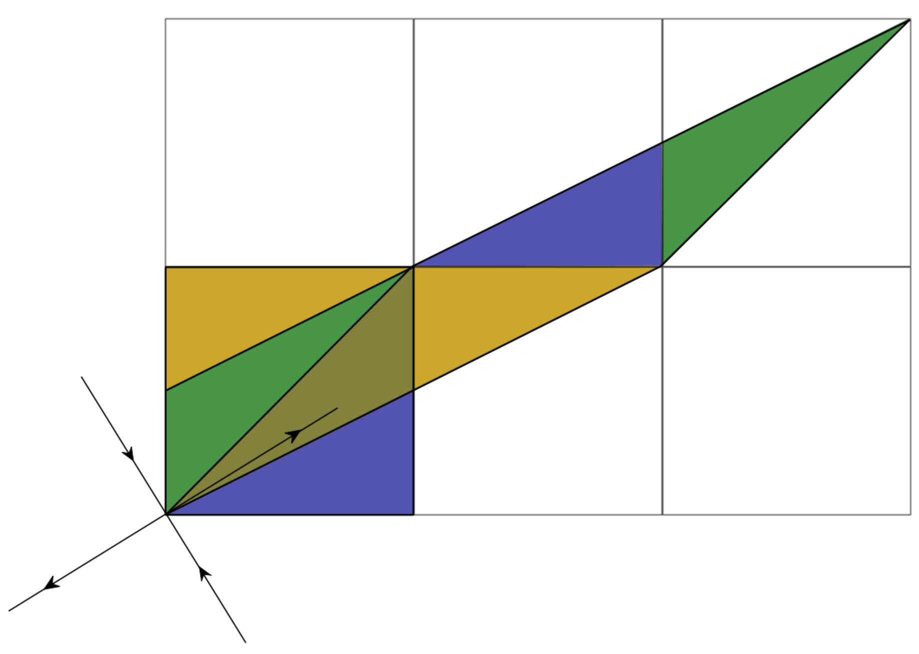
1. $T_xW^s_{loc}(x) = E^s(x)$, $T_xW^u_{loc}(x) = E^u(x)$;
2. $f(W^s_{loc}(x)) \subset W^s_{loc}(f(x))$, $f^{-1}(W^u_{loc}(x)) \subset W^u_{loc}(f^{-1}(x))$;
3. Para todo $\delta > 0$ existe $C(\delta)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) < C(\delta)(\lambda + \delta)^n \text{dist}(x,y) \text{ para } y \in W^s_{loc}(x)$$
$$\text{dist}(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < C(\delta)(\mu - \delta)^{-n} \text{dist}(x,y) \text{ para } y \in W^u_{loc}(x)$$

4. Existe $\beta > 0$ e uma família de vizinhaças O_x contendo a bola de centro x e radio β tal que

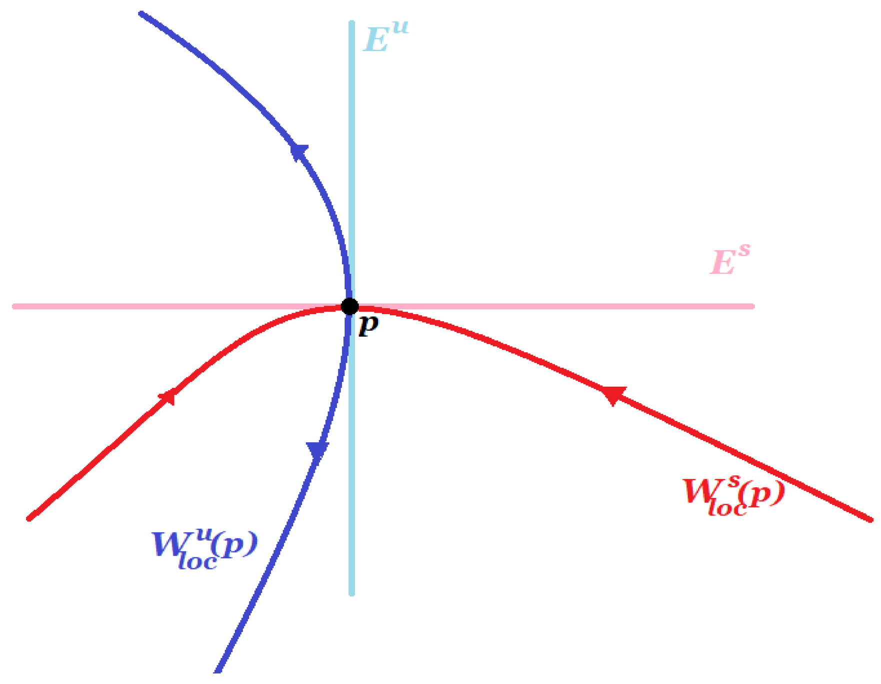
$$W^s_{loc}(x) = \{y : f^n(y) \in O_{f^n(x)}, n = 0, 1, 2, \ldots\}$$
$$W^u_{loc}(x) = \{y : f^{-n}(y) \in O_{f^{-n}(x)}, n = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Exemplo: No exemplo anterior $E^s(x) = \text{Span}\{(1-\sqrt{5}, 2)\}$ e $E^u(x) = \text{Span}\{(1+\sqrt{5}, 2)\}$, e W^s, W^u são a projeção destes subespaços no toro.



https://en.wikipedia.org/wiki/Arnold%27s_cat_map

No caso geral as subvariedades estável e instável local tem a forma



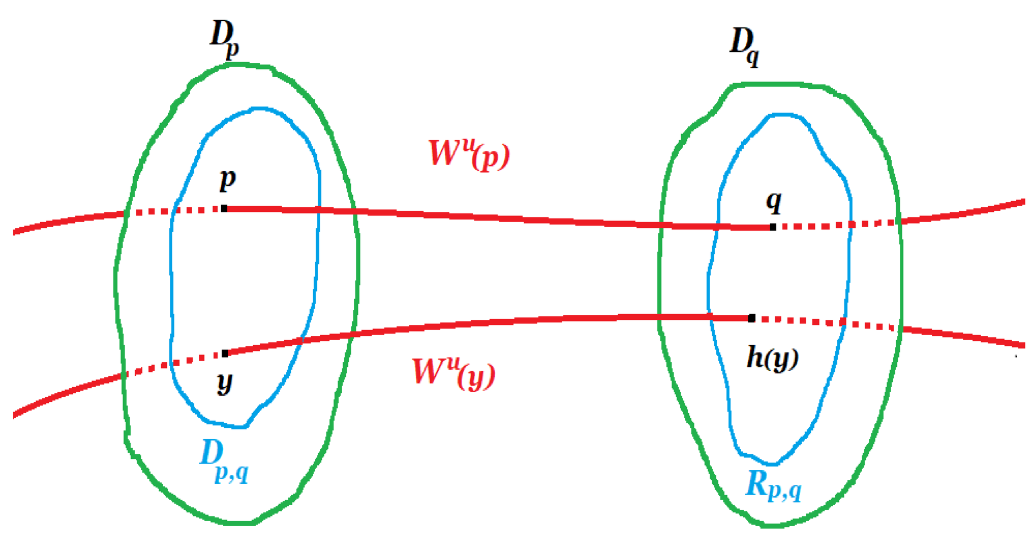
Definimos as variedades estável e instável (globais) por:

$$W^s(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-1}(W^s_{loc}(f^n(x)))$$
$$W^u(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-1}(W^u_{loc}(f^{-n}(x)))$$

Continuidadde absoluta das folheações estável e instável

Se f é um difeomorfismo de Anosov, as famílias $\mathcal{F}^s := \{W^s(x)\}_{x \in M}$ e $\mathcal{F}^u := \{W^u(x)\}_{x \in M}$ formam folheações para M, as quais chamamos de ***folheação estável*** e ***folheação instável*** respectivamente.

Teorema 5 [3]. Se $f : M \to M$ é um difeomorfismo de Anosov, as folheações estáveis e instáveis são absolutamente contínuas, mais ainda o Jacobiano da holonomia é contínuo e positivo.



Dados dois discos transversais à folheação $\mathcal{F}^u$, D_p e D_q a holonomia $h : D_{p,q} \to R_{p,q}$ é absolutamente contínua, se a medida μ_{D_q} é absolutamente contínua con respeito à medida $h_*\mu_{D_p}$, e o Jacobiano Jac$(h)(x)$ de h no ponto $x \in D_p$ é definido pela derivada de Radon-Nikodym $d\mu_{D_q}/d(h * \mu_p)$. As medidas μ_{D_p}, μ_{D_q} são induzidas pela estrutura riemanniana do TM.

Agradecimentos: O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundo de Apoio ao Ensino, à Pesquisa e Extensão (FAEPEX) e agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UNICAMP e meu orientador Gabriel Ponce.

Referências

[1] Katok, A. and Hasselblatt, B. Introduction to Modern Theory of Dynamical Systems. *Cambridge University Press*, 1995.

[2] Palis, J., and De Melo, W. Introdução aos sistemas dinâmicos. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 1978.

[3] Pugh, C. and Shub, M Ergodicity af Anosov Actions. *inventions Mathematicae Journal*, 1972.

[4] Barreira, L., and Pesin, Y. Nonuniform Hyperbolicity. *Cambridge University Press* 2007.

[1] Estudante de doutorado em Matemática - IMECC-UNICAMP
maresno@gmal.com
[2] Docente - IMECC-UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br