

Existência de ciclos limites para sistemas lineares costurantes por partes



Letícia Cândido, Kamila Andrade
 Instituto de Matemática e Estatística
 Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Goiás, Brasil
 leticia.souzacndd@gmail.com, kamila.andrade@ufg.br(orientadora),



Encontro Brasileiro de Mulheres Matemáticas 2019

Resumo

Um marco na evolução das Equações Diferenciais Ordinárias foi o trabalho de Henri Poincaré “*Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*” (1881), onde foram apresentadas as ideias básicas da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Esta teoria veio crescendo e possibilitando diferentes aplicações em várias áreas da ciência e, uma forma interessante de estudar as mesmas é através de sistemas de equações diferenciais definidas por partes pois assim conseguimos uma melhor aproximação dos resultados teóricos com o mundo real. Podemos definir esta classe de sistemas através da definição de dois ou mais campos vetoriais bem estabelecidos em regiões separadas por uma fronteira comum.

Introdução

Seja 0 um valor regular da função suave $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e defina $\Sigma = h^{-1}(0)$. Desta forma, Σ é a fronteira comum entre as duas regiões $\Sigma^\pm = \{\pm h(x, y) > 0\}$. O campo vetorial suave por partes $X = (X^+, X^-)$ definido por

$$X(q) = \begin{cases} X^+(q), & \text{se } q \in \Sigma^+, \\ X^-(q), & \text{se } q \in \Sigma^-, \end{cases}$$

onde X^\pm é um campo vetorial suave em \mathbb{R}^2 . Se X^\pm é um campo vetorial linear e $h(x, y) = y$, podemos escrevê-lo como:

$$(X^+, X^-) = \begin{cases} (a^+x + b^+y + c^+, d^+x + e^+y + f^+), & y > 0, \\ (a^-x + b^-y + c^-, d^-x + e^-y + f^-), & y < 0. \end{cases} \quad (1)$$

As propriedades de X são estabelecidas de acordo com as definições de Filippov [1]:

- Σ é região de costura se, para $p \in \Sigma$, $(X^+h(p))(X^-h(p)) > 0$;
- Σ é região de escape se, para $p \in \Sigma$, $(X^+h(p)) > 0$ e $(X^-h(p)) < 0$;
- Σ é região de deslize se, para $p \in \Sigma$, $(X^+h(p)) < 0$ e $(X^-h(p)) > 0$.

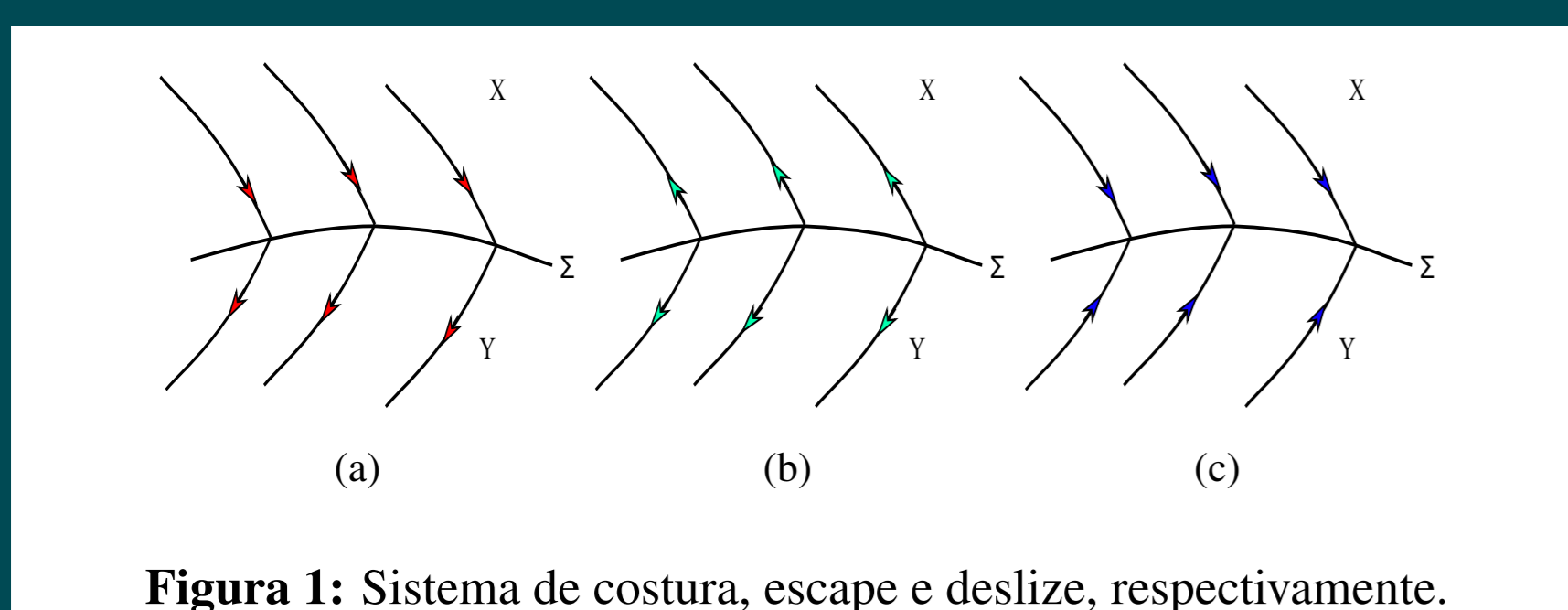


Figura 1: Sistema de costura, escape e deslize, respectivamente.

Caso o sistema (1) seja um sistema de costura então o mesmo pode ser escrito da forma:

$$X(x, y) = \begin{cases} (\mu_0^+ + \mu_1^+x + \mu_2^+y, x), & y > 0, \\ (\mu_0^- + \mu_1^-x + \mu_2^-y, x), & y < 0. \end{cases} \quad (2)$$

O objetivo deste trabalho é provar o seguinte teorema:

Teorema 1. *O campo vetorial (2) com singularidade monodrômica não tem ciclo limite quando $\mu_1^+\mu_1^- \geq 0$ e tem, no máximo, um ciclo quando $\mu_1^+\mu_1^- < 0$. Além disso, existe uma escolha de parâmetros para o qual a ciclo limite existe.*

Prova do Teorema 1

Para estudar a existência da órbita periódica precisamos primeiro estudar o comportamento do ponto singular e a estabilidade desse ponto para ver se o mesmo admite a existência dessas órbitas. Portanto, analisamos as constantes de Lyapunov associadas ao campo descontínuo. Calculamos através da composição de duas aplicações de meio retorno, $\Pi(x_0) = \Pi^-(\Pi^+(x_0))$. Equivalentemente podemos estudar a diferença desses dois mapas: $\Delta(x_0) = \pi^-(x_0) - \pi^+(x_0)$ onde $\pi^+(x_0) = \Pi^+(x_0)$ e $\pi^-(x_0) = (\Pi^-(x_0))^{-1}$.

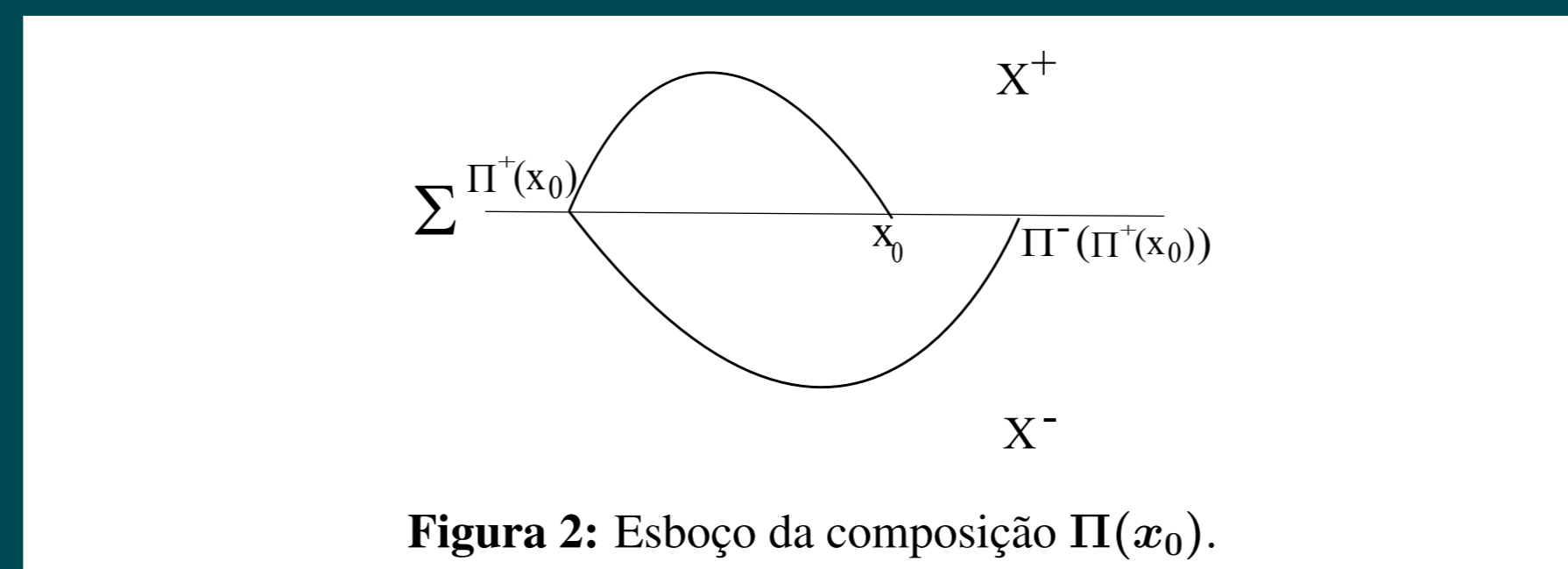


Figura 2: Esboço da composição $\Pi(x_0)$.

Temos como resultado as aplicações de primeiro retorno para os campos dados no sistema (2), (emitiremos contas extensas):

- $V_1 = 0$;
- $V_2 = \frac{2\mu_1^-\mu_0^+ - \mu_1^+\mu_0^-}{3\mu_0^+\mu_0^-}$;
- Se $V_2 = 0$ então $V_3 = \frac{4(\mu_1^+\mu_0^-)^2 - (\mu_1^-\mu_0^+)^2}{9(\mu_0^+\mu_0^-)^2} = 0$;
- Se $V_2 = V_3 = 0$ então $V_4 = \frac{2\mu_1^+(\mu_2^-(\mu_0^+)^2 - \mu_2^+(\mu_0^-)^2)}{15(\mu_0^+)^2(\mu_0^-)^3}$;
- Se $V_4 = 0 \Rightarrow \mu_1^+ = 0$ ou $\mu_2^-(\mu_0^+)^2 - \mu_2^+(\mu_0^-)^2 = 0$. Logo, $V_5 = \frac{4\mu_1^+(\mu_2^+(\mu_0^-)^2 - \mu_2^-(\mu_0^+)^2)}{15(\mu_0^+)^4(\mu_0^-)^2} = 0$.

Note que, como existem apenas duas condições para centro, apenas uma bifurcação para ciclo-limite na origem é garantida. O próximo resultado é imediato decorrente da expressão de V_4 .

Corolário 2. *Quando $\mu_0^\pm \neq 0$ a ordem máxima de focofraco do campo vetorial (2) é um. Além do mais, se $\mu_0^+\mu_1^+(\mu_2^+(\mu_0^-)^2 - \mu_2^-(\mu_0^+)^2) < 0 (> 0)$ então existe $\epsilon > 0 (< 0)$ suficiente pequeno tal que, para $\mu_1^- = (\mu_1^+\mu_0^+(\mu_0^-)^2 - \epsilon)/((\mu_0^+)^2\mu_0^-)$ um ciclo limite estável (instável) bifurca na origem por uma bifurcação de Hopf.*

A prova é consequência direta do resultado anterior.

Buscamos encontrar agora condições sobre os parâmetros do sistema (2) para que a órbita periódica exista.

Considere $\gamma(t) = (\phi(t), \psi(t))$ uma solução do sistema planar $X(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ tal que $\gamma(0) = p$, $p \in \mathbb{R}^2$ e $\Sigma = (\alpha(s), \beta(s))$, $s \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ uma curva regular dada por $h^{-1}(0)$ onde h é uma função do plano, 0 é um valor regular de Σ e $(\alpha(0), \beta(0)) = p$. Sejam T_0 e $T_1 \subset \Sigma$ seções transversais a γ em $p = \gamma(0) \in T_0$ e $q = \gamma(\tau) \in T_1$ respectivamente, onde τ é o menor valor em que vale $\gamma(\tau) \cap T_1 = q$ para $t > 0$.

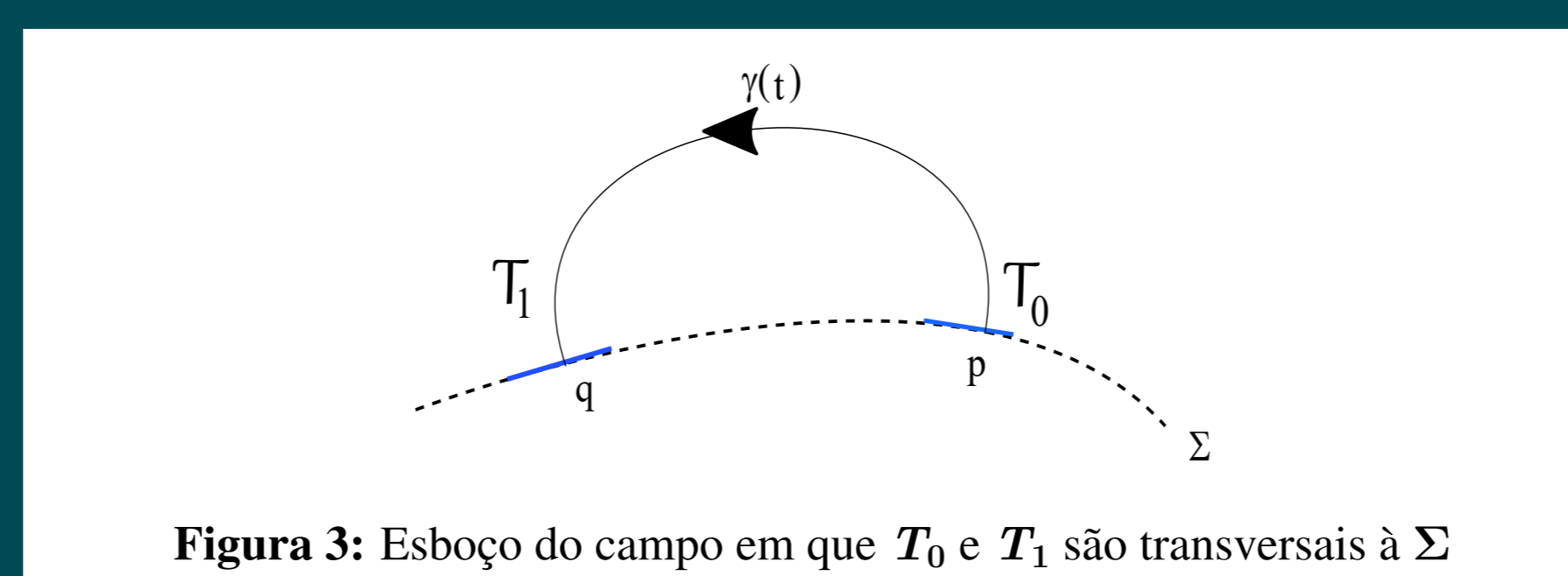


Figura 3: Esboço do campo em que T_0 e T_1 são transversais à Σ

Os próximos resultados fornecerão características importantes sobre a estabilidade do ciclo limite, além de garantir sua existência.

Teorema 3. *Seja $X = (X^+, X^-) = ((f^+, g^+), (f^-, g^-))$ um campo vetorial definido por partes no \mathbb{R}^2 com Σ sua região de descontinuidade, γ^\pm são duas soluções de X^\pm tal que $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^-$ é uma órbita periódica que intercepta transversalmente Σ em p^\pm . Então a derivada da aplicação de Poincaré em $p = p^+$ é*

$$\Pi'(p) = \frac{X^+h(p^+)X^-h(p^-)}{X^-h(p^+)X^+h(p^-)} \exp \int_\tau \text{div} X, \quad (3)$$

onde $\text{div} X = \text{div} X^\pm$ em Σ^\pm .

Demonstração. Sejam $T_0, T_1 \subset \Sigma$ seções transversais a γ em p^+ e p^- , respectivamente. seja Π^\pm a aplicações de Poincaré associadas a γ^\pm , respectivamente. Definimos a aplicação associada a γ pela composição $\Pi = \Pi^-(\Pi^+)$. Note que a derivada de Π é obtida multiplicando as derivadas de Π^- e Π^+ , ou seja, $\Pi'(p) = (\Pi^-)'(p^-)(\Pi^+)'(p)$ onde $p^- = \Pi^+(p)$ e $p = p^+$. Considere uma parametrização de Σ dada por $(\alpha(s), \beta(s))$, $s \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ tal que $(\alpha(0), \beta(0)) = p$. Temos que $h(\alpha(s), \beta(s)) = 0$ e $(\alpha'(s), \beta'(s)) = \lambda(-h_y, h_x)$ para uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ dada e dependente da parametrização. Do último resultado, sabemos

que

$$(\Pi^\pm)'(p^\pm) = \frac{\begin{vmatrix} f^\pm(p^\pm) & g^\pm(p^\pm) \\ -h_y(p^\pm) & h_x(p^\pm) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f^\pm(p^\mp) & g^\pm(p^\mp) \\ -h_y(p^\mp) & h_x(p^\mp) \end{vmatrix}} \exp \int_{\gamma^\pm} \text{div} X^\pm.$$

Note que a constante λ desaparece pois podemos colocá-la em evidência no numerador e no denominador.

A prova termina observando que

- $\begin{vmatrix} f^\pm(p^\pm) & g^\pm(p^\pm) \\ -h_y(p^\pm) & h_x(p^\pm) \end{vmatrix} = f^\pm(p^\pm)h_x(p^\pm) + g^\pm(p^\pm)h_y(p^\pm) = \langle (f^\pm(p^\pm), g^\pm(p^\pm)), (h_x(p^\pm), h_y(p^\pm)) \rangle = \langle X^\pm, \nabla h(p^\pm) \rangle = X^\pm h(p^\pm)$
- $\begin{vmatrix} f^\pm(p^\mp) & g^\pm(p^\mp) \\ -h_y(p^\mp) & h_x(p^\mp) \end{vmatrix} = \langle X^\pm, \nabla h(p^\mp) \rangle = X^\pm h(p^\mp)$.

Como consequência do teorema acima podemos escrever a derivada da aplicação de Poincaré de uma órbita periódica.

Corolário 4. *Seja $X = (X^+, X^-)$ um campo vetorial definido por partes como no Teorema 3 e $p \in \Sigma$.*

- Se $h(x, y) = y$ e $p = p^+$, então $\Pi'(p) = \frac{g^+(p^+)g^-(p^-)}{g^-(p^+)g^+(p^-)} \exp \int_\gamma \text{div} X$.
- Se X é contínuo na segunda coordenada, então $\Pi'(p) = \exp \int_\gamma \text{div} X$.

Sabemos que a linearidade de cada campo X^+ e X^- não permite a existência de ciclos limites cujo centro seja diferente do ponto singular, quando fazemos a composição desses dois campos, para existir ciclo, as órbitas devem "cortar" a curva de descontinuidade. Mais concretamente, as condições dos parâmetros em (2) garantem que o ciclo limite cerca a origem.

Proposição 5. *Seja γ um ciclo limite do campo vetorial (2) e τ^\pm os valores para os quais a curva entra em contato novamente com Σ^\pm , respectivamente. Se $\mu_1^+\tau^+ + \mu_1^-\tau^- < 0 (> 0)$, então γ é hiperbólico e estável (instável). Além do mais, se $\mu_1^+\mu_1^- \geq 0$ ou $\mu_0^\pm = 0$ não existem ciclos limites. Consequentemente, as seguintes condições são necessárias para a existência de ciclos limites no campo vetorial (2): $\mu_1^+\mu_1^- < 0$ e $\mu_0^+ \neq 0$ ou $\mu_0^- \neq 0$.*

Demonstração. As propriedades de estabilidade e hiperbolicidade, além das condições para μ_1^\pm são consequência direta do Critério de Dulac e do corolário 4. Se $\mu_0^\pm = 0$ o campo vetorial (2) é homogêneo e a existência de uma órbita periódica implica na existência de continuidade. Portanto, quando $\mu_0^\pm = 0$ não admite ciclo limite. \square

Conclusão e Direções Futuras

Definimos assim restrições para que exista ciclo limite em um campo vetorial suave por partes com região de costura, estudando também sua estabilidade. Prosseguimos o trabalho buscando a prova da unicidade dessa órbita periódica isolada para a nossa classe de campos vetoriais.

Referências

- [1] FILIPPOV A. F., *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*, Math. Appl. (Sov. Ser.), vol 18, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988.
- [2] FREIRE E., PONCE E., RODRIGO F., TORRES F., *Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones*, Internat. J. Bifur. Chaos (2002), 12(08), 1675-1702.
- [3] MEDRADO J. C., TORREGROSA J., *Uniqueness of limit cycles for sewing planar piecewise linear systems*, J. Math. Anal. Appl. 431 (2015), 529-544
- [4] PERKO L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Vol 7. Springer Science & Business Media, 2013.