A Propriedade do Normalizador em Extensões Orladas de Grupos Nilpotentes

Jacqueline Costa & Thierry Lobão

Universidade Estadual de Feira de Santana
Universidade Federal da Bahia

jccintra@uefs.com   thierry.petitlobao@gmail.com

Resumo

A determinação do normalizador do grupo gerador de um anel de grupo em seu grupo de unidades é uma questão que se impõe naturalmente. Em anéis de grupo integrais, em particular, observou-se que, para importantes classes de grupos finitos, este normalizador é minimal, ou seja, $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G) = G \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G))$. Quando tal fato ocorre, diz-se que o grupo em questão e seu anel de grupo integral safisfazem a Propriedade do Normalizador, também conhecida como (Nor).

Nesse trabalho, utilizamos técnicas desenvolvidas para ações deste tipo para mostrarmos a validade de (Nor) para certas extensões orladas envolvendo grupos nilpotentes.

Introdução

Definição 1. *Sejam A e B grupos e $\phi : B \times S \to S$ uma ação de B sobre um conjunto qualquer S não vazio. Definimos o* **produto orlado** *de A por B, com a ação ϕ, denotado $A\, wr\, B$, como $A^{|S|} \rtimes_\phi B$, $A^{|S|} = \underbrace{(A \times \ldots \times A)}_{|S|\text{ cópias}}$, e a ação ϕ de B (grupo topo) sobre $A^{|S|}$ (grupo base) é a seguinte: para $b \in B$, $(a_i) = (a_i)_{i \in S} \in A^{|S|}$ e $\phi_b : S \to S$ dada por $\phi_b(i) = \phi(b, i)$*

$$b(a_i)b^{-1} = (a_{\phi_b(i)})_{i \in S}.$$

Definição 2. *Temos o chamado* **produto orlado regular** *quando consideramos o grupo $S = B$ e o* **produto orlado permutacional** *quando o grupo $B = Sym_n$ (neste caso, $A\, wr\, B = A^n \rtimes Sym_n$).*

Temos ainda outra interpretação equivalente para o produto orlado, W, de A por B, encontrada em [CH62], que consiste na extensão cindida

$$W = F \rtimes Aut_B(F)^*,$$

em que $F = \{f : B \to A \text{ funções}\}$ é grupo munido da operação pontual, com $F \simeq A^{|B|}$, e $Aut_B(F)^* = \{\psi \in Aut(F) : \psi(f) = f^b, \text{para } b \in B\} \simeq B$, com $f^b(x) = f(xb^{-1})$, para todo $x \in B$ e $f \in F$. E ainda, denotamos por $D = \{f \in F : f \text{ constante}\}$ o chamado subgrupo diagonal de F.

Definição 3. *Um anel de grupo de G sobre R é um módulo livre tendo como base o grupo G e R sendo um anel com unidade, denotado por RG. Em nosso trabalho, consideraremos $R = \mathbb{Z}$ e G finito.*

Para cada $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G), \mathcal{U} := \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$, definimos $\varphi_u : G \to G$, por $\varphi_u(g) = u^{-1}gu$, $\forall g \in G$. Assim, temos que φ_u é um automorfismo de G e denotamos

$$Aut_{\mathcal{U}}(G) = \{\varphi_u \in Aut(G) : u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)\}.$$

A Propriedade do Normalizador e alguns resultados

(Nor): Sejam G um grupo e $\mathcal{U}$ o grupo das unidades de $\mathbb{Z}G$. Então dizemos que G satisfaz (Nor) se $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G) = G \cdot \mathcal{Z}$, em que $\mathcal{Z}$ é o centro do grupo $\mathcal{U}$.

(Nor) ser válida é equivalente a concluir que $Aut_{\mathcal{U}}(G) = Inn(G)$.

- (1964) Coleman - p-grupos (considerando corpo de característica p);
- (1987) Jackowski e Marciniak - grupos que contenham um 2-subgrupo de Sylow normal;
- (1995) Mazur - interessante relação: no contexto dos grupos infinitos, encontrando-se um contraexemplo para (Nor) é possível, a partir deste, fabricar um contraexemplo para o Problema do Isomorfismo, (Iso);
- (1999) Li, Parmenter e Sehgal - $G = A \times B$, se A e B são grupos soluções de (Nor);
- (2001) Hertweck - exemplo de um grupo finito (envolvendo um produto semidireto) que não satisfaz (Nor);
- (2003) Petit Lobão e Sehgal - $G = N\, wr\, Sym_m$, em que N é um grupo nilpotente (e desenvolveram técnicas para tratar das ações do tipo produto orlado).

Zhengxing Li e Jinke Hai, explorando as técnicas de Petit Lobão e Sehgal, obtiveram muitos grupos soluções para (Nor). Dentre eles temos alguns casos cujo grupo base é um grupo nilpotente variando o grupo topo, como por exemplo, um grupo abeliano.

Para uma outra forma de verificar a validade de (Nor), considere um 2-subgrupo de Sylow S fixado em G e defina o seguinte conjunto I_S:

$$I_S := \{\varphi_u \in Aut_{\mathcal{U}}(G) : \varphi_u^2 = id, \varphi_u|_S = id\}.$$

Teorema 1 (J. M., 1987). *Se $I_S \subseteq Inn(G)$, para um 2-subgrupo de Sylow S de um grupo G, então $Aut_{\mathcal{U}}(G) = Inn(G)$.*

Teorema 2 (Houghton, 1962). *$Aut(W) = I_F A^* H B^*$, em que, para todo $b \in B$ e $f \in F$, definimos:*

$$\iota \in I_F \Leftrightarrow \iota = conj(f_\iota)$$
$$\alpha^* \in A^* \Leftrightarrow \alpha^*(bf) = b\alpha^*(f)$$
$$\beta^* \in B^* \Leftrightarrow \beta^*(bf) = \beta(b)\beta^*(f)$$
$$h \in H \Leftrightarrow h \text{ fixa } B \text{ e } D.$$

Resultados

Em 1964, Peter M. Neumann provou que o grupo base é um subgrupo característico exceto quando $B \simeq C_2$ e A é um grupo diedral especial. Demonstramos que o grupo neste caso é uma solução de (Nor).

Teorema 3 (C., Petit Lobão, 2018). *Sejam $W = A\, wr\, B$, com A um diedral especial e $B \simeq C_2$. Então a Propriedade do Normalizador é válida para W.*

E para o caso em que o grupo base é subgrupo característico, verificamos (Nor) para uma certa extensão orlada de um grupo nilpotente:

Teorema 4 (C., Petit Lobão, 2018). *Seja $W = N\, wr\, B$, onde N é um grupo nilpotente finito e $B = B_2 \times B_1$, em que B_2 é um 2-grupo e B_1 um grupo de ordem ímpar. Então, a Propriedade do Normalizador é válida para W.*

Referências

[JM87] JACKOWSKI, S.; MARCINIAK, Z. Group automorphisms inducing the identity map on cohomology, *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 44, n. 1-3, p. 241-250, 1987.

[CH62] HOUGHTON, C. H. On the automorphism groups of certain wreath products, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, v. 9, p. 307-312, 1962.

[PeS03] PETIT LOBÃO, T.; SEHGAL, S. K. The Normalizer Property for Integral Group Rings of Complete Monomial Groups, *Communications in Algebra*, v. 31, n. 6, p. 2971-2983, 2003.

Agradecimentos

Agradeço a Thierry Lobão pela orientação, à CAPES e à FAPESB pelo apoio financeiro durante o meu doutorado.