Códigos Perfeitos via Grafos de Anéis dos Inteiros

Cintya Wink de Oliveira Benedito & Eider de Jesus Avelar da Silva

Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de São João da Boa Vista, SP & Universidade Ceuma (UNICEUMA), Campus de Imperatriz, MA

cintya.benedito@unesp.br

impa Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Seguindo as construções apresentadas em [2, 1, 3], este trabalho tem como objetivo apresentar a construção de códigos perfeitos para espaços de sinais bidimensionais através de conjuntos perfeitos t-dominantes sobre grafos de inteiros gaussianos e de Eisenstein-Jacobi. A métrica utilizada foi proposta por [2], que é baseada na distância dos vértices de grafos circulantes definidos sobre anéis dos inteiros.

Introdução

Conjuntos perfeitos t-dominantes resultam na teoria de códigos em códigos perfeitos para a métrica de Hamming e para a métrica de Lee. Neste contexto de relacionar grafos com códigos, em [1], foi apresentado uma condição suficiente para obter códigos perfeitos t-dominantes utilizando grafos obtidos a partir de anéis de inteiros, se estes existirem.

Considere um grafo $\mathcal{G}_\alpha = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$, onde $\mathcal{V} = \mathbb{Z}[i]_\alpha$ ou $\mathcal{V} = \mathbb{Z}[\omega]_\alpha$, no caso de um grafo Gaussiano ou de um grafo de Eisenstein-Jacobi, respectivamente.

Considere também a distância D_α, definida para tais conjuntos como:

$$D_\alpha(\beta,\gamma) = \min\{|x|+|y| \text{ , tal que } (\beta-\gamma) \equiv x+yi(mod\,\alpha),\ \beta,\gamma \in \mathbb{Z}[i]_\alpha\}$$

e

$$D_\alpha(\beta,\gamma) = \{|x|+|y|+|z| \mid \gamma-\beta \equiv x+y\omega+z\omega^2(mod\,\alpha),\ \beta,\gamma \in \mathbb{Z}[\omega]_\alpha\}.$$

Um *código* em $\mathcal{G}_\alpha$ é um subconjunto não vazio $\mathcal{C}$ de $\mathcal{G}_\alpha$. Um código $\mathcal{C}$ é chamado *perfeito* se as bolas de raio t centradas nos pontos de $\mathcal{C}$ particionam o conjunto de pontos $\mathcal{V}$, ou seja, é um código que corrige todos os padrões com até t erros e nenhum padrão com $t+1$ erros ou mais.

Resultados

Os Teoremas 1 e 2 nos fornecem condições para obter códigos perfeitos t-dominantes via grafos de anéis de inteiros Gaussianos e de Eisenstein-Jacobi, respectivamente.

Teorema 1: *Seja $0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}[i]$ e t um inteiro positivo. Temos que:*

(i) *Se $\beta = t + (t+1)i$ divide α, então o ideal $S = \langle\beta\rangle \subseteq \mathbb{Z}[i]_\alpha$ é um conjunto perfeito t-dominante em $\mathcal{G}_\alpha$;*

(ii) *Se $\bar{\beta} = t - (t+1)i$ divide α, então o ideal $S = \langle\bar{\beta}\rangle \subseteq \mathbb{Z}[i]_\alpha$ é um conjunto perfeito t-dominante em $\mathcal{G}_\alpha$.*

Exemplo 1: *Seja $\alpha = 10 + 11i = (2-3i)(-1+4i) \in \mathbb{Z}[i]$. Então, $\langle\alpha\rangle$ gera uma constelação de sinais com $\mathcal{N}(\alpha) = 221$ elementos em $\mathbb{Z}_{10+11i}$. Como $\beta = 2-3i$ divide $\alpha = 10+11i$, o ideal $S = \langle 2-3i\rangle = \{0, 2-3i, -2+3i, 3+2i, -3-2i, 4-6i, -4+6i, 5-i, -1-5i, 1+5i, -5+i, 6+4i, -6-4i, 1-8i, 8+i, -1+8i, -1+8i, -8-i\} \subseteq \mathbb{Z}[i]_{10+11i}$ é um conjunto perfeito 2-dominante no grafo G_{10+11i}. Portanto, o código perfeito com $\mathcal{N}(\beta) = 17$ palavras-código, que corrige todos os padrões com 2 erro e nenhum padrão com 3 ou mais erros é dado pelo conjunto S. Tal código é representado pela Figura 1, identificando as palavras-código pelos pontos destacados em negrito, os quais formam os baricentros dos 17 polígonos fundamentais (contendo 13 elementos cada) que recobrem a constelação de sinal com 221 elementos.*

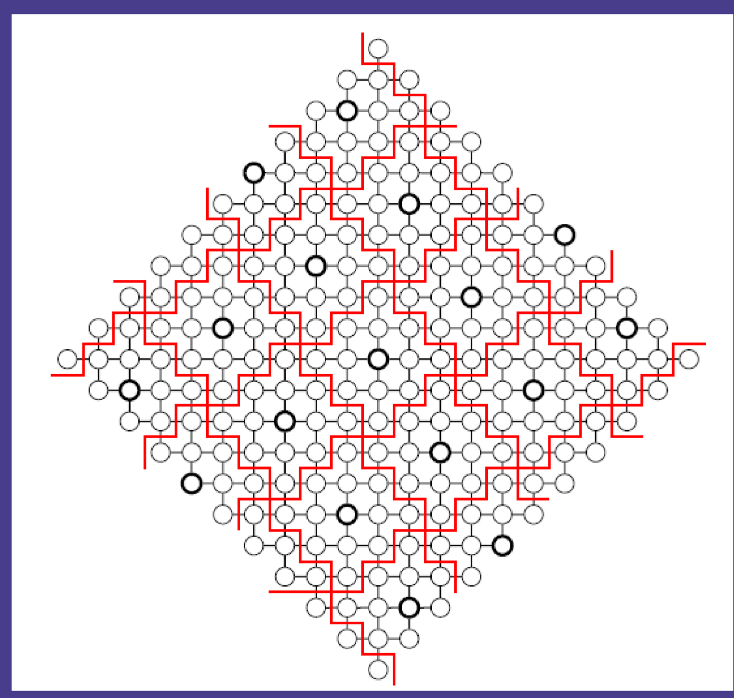

Figura 1: Código Perfeito 2-dominante em $\mathbb{Z}_{10+11i}$

Teorema 2: *Dado $0 \neq \alpha = a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega]$ e t um inteiro positivo.*

(i) *Se $\beta = t + (2t+1)\omega$ divide α, então o ideal $S = \langle\beta\rangle \subseteq \mathbb{Z}[\omega]_\alpha$ é um conjunto perfeito t-dominante em $\mathcal{J}_\alpha$.*

(ii) *Se $-\bar{\beta} = (t+1) + (2t+1)\omega$ divide α , então o ideal $S = \langle -\bar{\beta}\rangle = \langle\bar{\beta}\rangle \subseteq \mathbb{Z}[\omega]_\alpha$ é um conjunto perfeito t-dominante em $\mathcal{J}_\alpha$.*

Exemplo 2: *Dado $\alpha = -8 - 3\omega = (1+3\omega)^2 \in \mathbb{Z}[\omega]$, temos que $\mathcal{N}(\alpha) = 49$ e $\langle\alpha\rangle$ gera uma constelação de sinais com 49 elementos em $\mathbb{Z}[\omega]_{-8-3\omega}$. Fazendo $\beta = 1 + 3\omega$, temos que $\beta|\alpha$ e portanto, o ideal $\langle\beta\rangle = \langle 1+3\omega\rangle$ é um conjunto perfeito 1-dominante em $\mathbb{Z}[\omega]_{-8-3\omega}$. Então, o código perfeito que corrige todos os padrões com 1 erro e nenhum padrão com 2 ou mais erros, possui $\dfrac{\mathcal{N}(\alpha)}{\mathcal{N}(a)} = \dfrac{49}{7} = 7$ elementos e é dado por*

$$S = \{0, 1+3\omega, -3-2\omega, -2+\omega, 2-\omega, 2-\omega, 3+2\omega, -1-3\omega\}.$$

Tal conjunto é identificado no grafo pelos pontos cheios, formando os baricentros dos 7 polígonos fundamentais (contento 7 elementos cada) que recobrem a constelação hexagonal de sinais, contendo os 49 elementos de $\mathbb{Z}[\omega]_{-8-3\omega}$ como ilustrado na Figura 2.

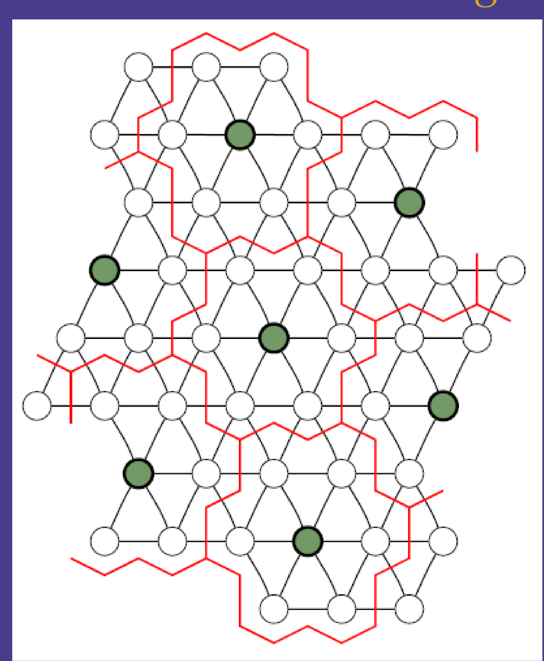

Figura 2: Código Perfeito 1-Corretor sobre $\mathbb{Z}[\omega]_{-8-3\omega}$

Referências

[1] C. Martinez. Códigos y grafos sobre anillos de enteros complejos. *Santander: Enero*, 2007.

[2] C. Martinez, R. Beivide, and E. Gabidulin. Perfecto codes from metrics induces by circulant graphs. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 53(9):3042–3052, September 2007.

[3] C.R.O.Q. Queiroz. Códigos geometricamente uniformes derivados de grafos sobre anéis quocientes de inteiros e de ordens dos quartérnios. *Tese de Doutorado, Universidade de Campinas*, 2011.

Agradecimentos

Agradecemos ao Encontro Brasileiro de Mulheres Matemáticas pela oportunidade e a FAPESP pelo apoio financeiro.