Desigualdade de Alexandrov-Fenchel no espaço hiperbólico com peso e uma conjectura Ge, Wang e Wu

Neilha Pinheiro, F. Girão, D. Pinheiro & D. Rodrigues

Universidade Federal do Amazonas

neilhamat@gmail.com

Resumo

Consideramos uma desigualdade conjecturada por Ge, Wang e Wu no espaço hiperbólico com peso. Provamos uma desigualdade semelhante à que foi conjecturada. Além disso, quando o espaço ambiente tem dimensão três, apresentamos um contra-exemplo para a desigualdade conjecturada.

Introdução

Consideremos uma hipersuperfície $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ horoesférica convexa, isto é, as curvaturas principais de Σ são maiores ou iguais a 1. Em [2], Ge, Wang e Wu provaram o seguinte teorema:

Teorema 1. (Ge, Wang and Wu, [2]) *Se $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ é horoesférica convexa com $1 \leq k \leq n-1$ e $k = 2l+1$, então*

$$\int_\Sigma \rho H_k d\Sigma \geq \omega_{n-1}\left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{2n}{(k+1)(n-1)}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{2(n-k-1)}{(k+1)(n-1)}}\right]^{\frac{k+1}{2}}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, Σ é uma esfera geodésica centrada na origem.

O caso inicial da desigualdade acima foi provado por de Lima e Girão em [1]. Sabendo que ocorre o caso inicial, Ge, Wang e Wu provaram o passo indutivo de k para $k+2$, obtendo o caso ímpar da desigualdade do Teorema 1.

Objetivos

Nosso objetivo é estudar a seguinte conjectura.

Conjectura. (Ge, Wang and Wu, [2]) *Seja $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície horoesférica convexa , então*

$$\int_\Sigma \rho d\Sigma \geq \omega_{n-1}\left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{2n}{n-1}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Se a igualdade ocorre, então Σ é uma esfera geodésica centrada na origem .

Resultados

Consideramos o fluxo dado pela função suporte

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\theta\xi.$$

A função suporte θ é definida por

$$\theta := \bar{g}(D\rho, \xi),$$

onde D é a conexão de $\mathbb{H}^n$.

Propriedades do Fluxo pela Função Suporte

1. O fluxo pela função suporte existe para todo tempo $t \in [0, \infty)$ e converge para origem quando $t \to \infty$;
2. Sejam

$$\mathcal{P}(\Sigma) := \left(\omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)^{-2}\left(\left(\int_\Sigma \rho d\Sigma\right)^2 - |\Sigma|\right)^2$$

$$Q(\Sigma) := \left(\omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|_\delta}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}\right)^{-1}\int_\Sigma |x|^2 (d\Sigma)_\delta.$$

Então,

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{P}(\Sigma) = \mathcal{Q}(\Sigma).$$

Teorema A. *Existe uma hipersuperfície horoesférica convexa Γ em $\mathbb{H}^3$ tal que*

$$\int_\Gamma \rho d\Gamma < \omega_{n-1}\left[\left(\frac{|\Gamma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{2n}{n-1}} + \left(\frac{|\Gamma|}{\omega_{n-1}}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema B. *Seja Σ uma hipersuperfície estrelada em $\mathbb{H}^n$ com*

$$H_1 \geq 1.$$

Então

$$\int_\Sigma \rho d\Sigma > \omega_{n-1}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{2n}{n-1}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema C. *Se Σ é uma hipersuperfície horoesférica convexa em $\mathbb{H}^n$ e $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ é par, então*

$$\int_\Sigma \rho H_k d\Sigma > \omega_{n-1}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{2n}{(k+1)n-1}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{2(n-k-1)}{(k+1)(n-1)}}\right]^{\frac{k+1}{2}}.$$

Conclusão

- Exibimos um contra-exemplo para a conjectura apresentada por Ge, Wang e Wu.
- Provamos uma desigualdade semelhante à que foi conjecturada.
- Generalizamos a desigualdade apresentada no Teorema B.

Referências

[1] de Lima and F. Girão. An alexandrov-fenchel-type inequality in hyperbolic space with an apllication to a penrose inequality. *Ann. Henri Poincaré*, 4(17):979–1002, 2016.

[2] Wang G. Ge, Y. and J. Wu. The GBC mass for asymptotically hyperbolic manifolds. *Math. Z.*, 281:257–297, 2015.

[3] F. Girão and D. Rodrigues. Weighted geometric inequalities for hypersufaces in substatic manifolds. *Preprint*, 2018.

[4] Pinheiro D. Pinheiro N. M. Girão, F. and D. Rodrigues. Weighted alexandrov-fenchel inequalities in hyperbolic space and a conjecture of ge, wang and wu. *arXiv: 1902.07322v1*, 2019.

Agradecimentos

Agradeço aos colaboradores Frederico Girão, Diego Pinheiro e Diego Rodrigues, à Capes pelo suporte financeiro e à organização do **32** Colóquio Brasileiro de Matemática.