A função zeta, de Euler a Riemann

uma introdução à teoria analítica de números

Helena Günther

Universidade Federal de Santa Catarina

helena.mtm@gmail.com

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O texto original foi apresentado como dissertação do Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), no ano de 2018. Neste trabalho abordamos, de um ponto de vista elementar, as origens e a evolução da teoria analítica de números. Para isto, primeiramente é analisado o surgimento da função zeta (devido a Leonhard Euler), enfatizando principalmente a sua relação com os números primos. Em seguida apresentamos a extensão analítica da função zeta em todo o plano complexo (exceto por seu polo em $z = 1$), gerando o que conhecemos como função zeta de Riemann. Apresento abaixo as principais definições e resultados utilizados para a construção dessa continuação analítica e convido à leitura do texto completo para mais detalhes.

Definição. *A função zeta de Euler é definida como* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *para todo* $s \in \mathbb{R}$ *tal que* $s > 1$.

Observação. *É possível demonstrar que* ζ *está definida para todo o semiplano* $Re(s) > 1$. *Os resultados abaixo podem ser demonstrados para* $s \in \mathbb{R}$.

Teorema: Fórmula do produto de Euler

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{\text{p primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Teorema

A série abaixo diverge:

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

Definição. *Para* $x \in (0, \infty)$ *definimos a função gama por*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt.$$

A função gama será uma das funções usadas na construção da extensão analítica de zeta. Podemos ver, nos resultados abaixo, que gama coincide com a função fatorial para valores naturais (exceto no zero), e estende a função fatorial, mantendo sua recursividade, para todos os reais positivos.

Proposição. *Se* $x > 0$, *então* $\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x)$.

Note que gama, assim definida, satisfaz a identidade abaixo:

Corolário. *para* $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

Teorema

Para todo $s \in \mathbb{C}$, $\Gamma(s)\Gamma(1 - s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi s}$.

Estendemos então a função gama para o plano complexo, para que possamos futuramente estender zeta. Iniciamos com uma análise da extensão de Γ para o semiplano complexo $\Re(s) > 0$.

Proposição. *A função gama tem extensão analítica no semiplano* $\Re(s) > 0$, *e sua extensão analítica também é dada pela fórmula integral*

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} \, dt.$$

Teorema

A função $\Gamma(s)$, definida inicialmente para $\Re(s) > 0$, tem como continuação analítica uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ cujas únicas singularidades são polos simples nos inteiros negativos e no zero (ou seja, os pontos $s = 0, -1, -2, \ldots$). O resíduo de Γ em $s = -n$ é $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Analisamos então a convergência da soma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ no plano complexo.

Proposição. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *converge para todo* s *com* $\Re(s) > 1$ *e a função* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *é holomorfa nesse semiplano.*

Definimos uma função $\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$, e com isso obtemos o seguinte resultado:

Teorema

Se $\Re(s) > 1$, então

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\tfrac{s}{2}) \zeta(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1} [\theta(u) - 1] \, du.$$

Analisamos então a parte esquerda dessa igualdade, à qual chamamos de $\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s)$.

Teorema

A função $\xi(s)$ é holomorfa para $\Re(s) > 1$ e tem continuação analítica em todo plano complexo como uma função meromorfa com polos simples em $s = 0$ e $s = 1$. Além disso,

$$\xi(s) = \xi(1 - s) \qquad \text{para todo } s \in \mathbb{C} \backslash \{0, 1\}.$$

Finalmente, encontramos a forma da extensão analítica de $\zeta(s)$ para seu domínio, $\mathbb{C} \backslash \{0\}$, a saber:

$$\xi(s) = \frac{1}{s - 1} - \frac{1}{s} + \int_1^{\infty} [u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1}] \psi(u) \, du,$$

onde $\psi(u) = \frac{\theta(u)-1}{2}$. A extensão analítica de zeta é concluída com a demonstração do teorema abaixo.

Teorema

a função zeta tem continuação meromorfa em todo o plano complexo, tendo como única singularidade um polo simples em $s = 1$.

Conclusão

É um tanto surpreendente que a teoria de números tenha tido que confiar na análise para seu desenvolvimento, assim como surpreende que os números primos, tão fundamentais na aritmética, tenham uma distribuição tão imprevisível e ainda não plenamente compreendida. A busca ainda não concluída por uma demonstração da validade da Hipótese de Riemann é um grande estímulo para o estudo da função zeta. No entanto, encontrar um texto acessível para iniciar este estudo pode se mostrar um desafio. Dessa forma, buscamos de maneira sucinta e direta compilar os resultados necessários à construção da continuação analítica de zeta, visando um estudo autocontido e detalhado, tendo como público alvo graduandos e pós-graduandos em Matemática.

Referências

[1] William Dunham. *Euler: the master of us all.* Number no. 22 in The Dolciani mathematical expositions. Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1999.

[2] Harold M. Edwards. *Riemann's zeta function.* Dover Publications, Mineola, NY, dover ed edition, 2001.

[3] Leonard Euler. Several Remarks on Infinite Series (variae observationes circa series infinitas). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, (9):160–188, 1744. Acessado em 20/08/2018.

[4] Julian Havil. *Gamma: exploring Euler's constant.* Princeton University Press, Princeton, 2003.

[5] Bernhard Riemann. on the numbers of primes less than a given quantity (Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse). *Monatsberichte der Berliner Akademie*, November 1859. Acessado em 02/06/2018.

[6] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Complex analysis.* Number 2 in Princeton lectures in analysis. Princeton University Press, Princeton, N.J, 2003.

[7] Robert M. Young. *Excursions in calculus: an interplay of the continuous and the discrete.* Number no. 13 in The Dolciani mathematical expositions. Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1992.

Agradecimentos

Ao PROFMAT/UFSC, pela oportunidade de elaborar este trabalho; ao Prof. Dr. Eliezer Batista, por tê-lo orientado; à PROAP/PROPG (UFSC), pelo apoio para a sua apresentação neste evento.