Estudo comparativo de métodos de projeção para a resolução de sistemas lineares esparsos

Rafaela Correia Brum, Cristiane Oliveira de Faria & Maria Clicia Stelling de Castro

PPG em Ciências Computacionais, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

rafinhacbrum@gmail.com, cofaria@ime.uerj.br, mariaclicia@gmail.com

Resumo

Neste trabalho estamos interessados nos métodos iterativos de projeção para resolução dos sistemas lineares. Estes métodos se utilizam das propriedades inerentes dos subespaços vetoriais e, normalmente, utilizam dois subespaços para encontrar a solução aproximada do sistema linear, um de procura e outro de restrição.

Introdução

Os métodos estudados neste trabalho são métodos de projeção ortogonal que utilizam o subespaço de Krylov como o subespaço de procura $\mathcal{K}$ e também como o de restrição $\mathcal{L}$. O subespaço de Krylov de A e $\vec{v}$ é definido como o subespaço gerado pelas potências da matriz A multiplicadas pelo vetor $\vec{v}$, como mostrado em (1). Para o subespaço de Krylov existir, a matriz A tem que ser uma matriz quadrada, mas o vetor $\vec{v}$ pode ser um vetor qualquer.

$$\mathcal{K}_k(A, \vec{v}) = ger\{\vec{v}, A\vec{v}, A^2\vec{v}, \ldots, A^{m-1}\vec{v}\} \tag{1}$$

Métodos comparados

1. **GMRES**, método generalizado de mínimos residuais, encontrado em [5];
2. o **GMRES reiniciado**, também apresentado em [5];
3. **GMRES flexível**, encontrado em [4];
4. **αGMRES**, apresentado em [1] e;
5. ***Heavy Ball* GMRES**, encontrado em [2].

Método GMRES

$$x_m = x_0 + \arg \min_{z \in \mathcal{K}_k(A, r_0)} \|b - A(x_0 + z)\|_2 \tag{2}$$

Método GMRES reiniciado

$$x_m^{(l)} = x_0^{(l)} + \arg \min_{z \in \mathcal{K}_k(A, r_0^{(l)})} \|b - A(x_0^{(l)} + z)\|_2 \tag{3}$$

Método GMRES flexível

- Resolve o o sistema $AM^{-1}(Mx) = b$ em vez do $Ax = b$

Método αGMRES

- Utiliza o cosseno de resíduos consecutivos para alterar a quantidade de iterações por ciclo

Método *Heavy Ball* GMRES

$$x_m^{(l)} = x_0^{(l)} + \arg \min_{z \in \mathcal{K}_k(A, r_0^{(l)}) + ger\{x_0^{(l)} - x_0^{(l-1)}\}} \|b - A(x_0^{(l)} + z)\|_2 \tag{4}$$

Resultados

As matrizes esparsas escolhidas foram encontradas no antigo repositório da Universidade da Flórida, hoje chamado de *SuiteSparse Matrix Collection* (https://sparse.tamu.edu) e são matrizes reais, não são positivas definidas.

	GMRES		
Nome	**Esparsidade**	**Solução**	**Tempo de execução**
$cavity05$	1,1323%	Sim	1,001 s
$circuit\_2$	0,1042%	Não	103,061 s
$raefsky1$	2,7998%	Sim	0,503 s

	# de ciclos			
Nome	**GMRESm**	**FGMRES**	**αGMRES**	**HBGMRES**
$cavity05$	204	78	204	256
$circuit\_2$	51	14	61	44
$raefsky1$	208	262	110	144

	Tempo de execução			
Nome	**GMRESm**	**FGMRES**	**αGMRES**	**HBGMRES**
$cavity05$	2,148 s	1,083 s	1,890 s	2,767 s
$circuit\_2$	0,454 s	0,165 s	0,348 s	0,424 s
$raefsky1$	5,490 s	9,007 s	1,774 s	3,964 s

Conclusões

- Todas as modificações estudadas para o GMRES reiniciado apresentam melhores resultados em algumas matrizes e piores em outras.
- O GMRES flexível converge mais rápido por usar um precondicionador.
- O αGMRES apresenta os melhores tempos de execução (média) com quantidade de ciclos similares ao GMRES reiniciado.
- O *Heavy Ball* GMRES melhora a convergência das matrizes com número de condicionamento ruim.

Referências

[1] Allison H Baker, Elizabeth R Jessup, and Tz V Kolev. A simple strategy for varying the restart parameter in gmres (m). *Journal of computational and applied mathematics*, 230(2):751–761, 2009.

[2] Akira Imakura, Ren-Cang Li, and Shao-Liang Zhang. Locally optimal and heavy ball gmres methods. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 33(2):471–499, 2016.

[3] Boris T Polyak. Introduction to optimization. optimization software. *Inc., Publications Division, New York*, 1, 1987.

[4] Youcef Saad. A flexible inner-outer preconditioned gmres algorithm. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 14(2):461–469, 1993.

[5] Youcef Saad and Martin H Schultz. Gmres: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on scientific and statistical computing*, 7(3):856–869, 1986.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001