Condição de Regularidade para um Problema de Controle Ótimo com Restrições Lineares Mistas de Igualdade

Jamielli Tomaz Pereira & Valeriano Antunes de Oliveira & Roberto Andreani

IMECC/UNICAMP

jamielli.pereira@gmail.com

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma generalização das condições necessárias de otimalidade para problemas de controle ótimo com restrições lineares mistas de igualdadade, o celebrado Princípio do Máximo de Pontryagin (PMP). O princípio do máximo está no contexto não suave, fazemos uso da subdiferencial de Mordukhovich. O resultado foi obtido sob uma condição de regularidade que generaliza a condição de posto completo.

Introdução

Em programação não linear, restrições lineares é suficiente para a condição de KKT ser uma condição necessária de otimalidade. Em controle ótimo, a linearidade das restrições não é suficiente para que as condições necessárias do Princípio do Máximo de Pontryagin (PMP) sejam válidas.

Exemplo 1.

$$\begin{aligned} &\min\ x(1) \\ &\text{s. a}\ \dot{x}(t) = u_1(t) \text{ q.s.,} \\ &\qquad x(t) + u_1(t) + 2u_2(t) = 0 \text{ q.s.,} \\ &\qquad u_1(t) + 2u_2(t) = 0 \text{ q.s..} \end{aligned}$$

O único processo é $(x, u_1, u_2) = (0, 0, 0)$, logo é ótimo. As condições do PMP são escritas como:

$$\begin{aligned} &\|p\|_\infty + \lambda \neq 0, \\ &-\dot{p}(t) = q_1(t) \text{ q.s.,} \\ &p(t) + q_1(t) + q_2(t) = 0 \text{ q.s.,} \\ &2q_1(t) + 2q_2(t) = 0 \text{ q.s.,} \\ &(p(0), -p(1)) = \lambda(0, 1). \end{aligned}$$

Como este sistema não tem solução, o exemplo nos mostra que é necessário impor alguma condição de regularidade sob as restrições mistas de igualdade, a fim de se obter o PMP, mesmo no caso linear. A condição de regularidade mais conhecida envolve uma condição de posto completo.

Objetivo

A intenção deste trabalho é apresentar uma condição de regularidade sob as restrições lineares mistas de igualdade para que o PMP seja uma condição necessária de otimalidade.

Problema e Resultado

Considere o seguinte problema de controle ótimo:

$$\begin{aligned} &\min\ l(x(0), x(1)) \\ &\text{s. a}\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t))\ q.s., \\ &\qquad A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t) - b(t) = 0\ q.s., \\ &\qquad v(t) \in V(t)\ q.s., \\ &\qquad (x(0), x(1)) \in C, \end{aligned} \tag{P}$$

onde $T = [0, 1]$, $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz, $f : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k_u} \times \mathbb{R}^{k_v} \to \mathbb{R}^n$ é Lebesgue mensurável em t e localmente Lipschitz em (x, u, v), $(A, B, C) : T \to \mathbb{R}^{m_b \times n} \times \mathbb{R}^{m_b \times k_u} \times \mathbb{R}^{m_b \times k_v}$ e $b : T \to \mathbb{R}^{m_b}$ são funções Lebesgue mensuráveis, $V : T \rightrightarrows \mathbb{R}^{k_v}$ tem gráfico Borel mensurável e $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é fechado.

Definição 1. Um processo é uma tripla (x, u, v) compreendendo de um arco $x \in W^{1,1}(T; \mathbb{R}^n)$ e funções mensuráveis $(u, v) : T \to \mathbb{R}^{k_u} \times \mathbb{R}^{k_v}$ satisfazendo as restrições de (P).

Definição 2. Um processo $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ é um minimizador fraco se, para algum $\varepsilon > 0$, o processo minimiza o custo sobre todos os processos (x, u, v) satisfazendo $(x(t), u(t), v(t)) \in (\bar{x}(t) + \varepsilon B) \times (\bar{u}(t) + \varepsilon B) \times ((\bar{v}(t) + \varepsilon B) \cap V(t))$ q.s..

A condição de regularidade abaixo é mais fraca do que a condição de posto completo dada por de Pinho em [1].

Definição 3. A condição de regularidade é dita satisfeita se

(i) $\text{Im}([\,A(t)\ \ C(t)\,]) \subset \text{Im}(B(t))$ q.s.;

(ii) existe $k_B > 0$ tal que $\sigma_{p(t)}(B(t)) \geq k_B$ q.s.;

onde $p(t) = \text{posto}(B(t))$ q.s. e $\sigma_{p(t)}(B(t))$ denota o menor valor singular da matriz $B(t)$.

Teorema. **[PMP]** Seja $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ um minimizador fraco para (P). Defina $H(t, x, p, q, u, v) := p \cdot f(t, x, u, v) + q \cdot (A(t)x + B(t)u + C(t)v - b(t))$. Se a condição de regularidade é válida, então existem $p \in W^{1,1}(T; \mathbb{R}^n), q \in L^1(T; \mathbb{R}^{m_b}), \zeta \in L^1(T; \mathbb{R}^{k_v})$ e $\lambda \geq 0$ tais que

(i) $\|p\|_\infty + \lambda \neq 0$,

(ii) $(-\dot{p}(t), 0, \zeta(t)) \in \text{co}\,\partial_{x,u,v} H(t, \bar{x}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t))$ q.s.,

(iii) $\zeta(t) \in \text{co}\,N_{V(t)}(\bar{v}(t))$ q.s.,

(iv) $(p(0), -p(1)) \in N_C(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) + \lambda \partial l(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$.

Para alguma função integrável K_m, $|q(t)| \leq K_m(t)|p(t)|$ q.s..

Exemplo 2. Considere o seguinte problema de controle ótimo:

$$\begin{aligned} &\min\ x(1) \\ &\text{s. a}\ \dot{x}(t) = t u_1(t)^2 + u_2(t)^2 \text{ q.s.,} \\ &\qquad x(t) + u_1(t) + u_2(t) = 0 \text{ q.s.,} \\ &\qquad 2x(t) + 2u_1(t) + 2u_2(t) = 0 \text{ q.s.,} \\ &\qquad (x(0), x(1)) \in \{0\} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

O único processo é $(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2) = (0, 0, 0)$, logo é ótimo. A condição de posto completo não é válida. Mas a condição de regularidade vale, pois $\text{Im}(A(t)) \subset \text{Im}(B(t))$ q.s. e existe $k_B = \sqrt{10}$ satisfazendo a condição (ii). O PMP vale com $p(t) = -1$, $\lambda = 1$, $q_1(t) = q_2(t) = 0$ q.s..

Conclusão

Provamos a validade da condição necessária de otimalidade para um problema de controle ótimo com restrições lineares mistas de igualdade sob uma condição de regularidade mais fraca do que a condição, tradicional da literatura, de posto completo. O próximo passo deste trabalho é estender o resultado para problemas com restrições lineares mistas de igualdade e de desigualdade.

Referências

[1] M. R. de Pinho. Mixed constrained control problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 278:293–307, 2003.

Agradecimentos

À FAPESP pela bolsa de doutorado, processo 2015/25610-1.