Investigando emparelhamento perfeito em produto cartesiano de grafos

Camila S. Crispim [1], **Cybele T.M. Vinagre** [2]
IME - UFF
[1]camilacrispim@id.uff.br — [2]cybele_vinagre@id.uff.br

Definições Básicas

(I) Seja G um grafo simples com n vértices.

- **Emparelhamento em** G: é um conjunto M de arestas de G tal que nenhum par de elementos de M possui vértice em comum.
- **Emparelhamento** M **satura o vértice** v **de** G: quando existe aresta em M que seja incidente em v.
- **Número de emparelhamento de** G **,** $\mu(G)$: número de arestas de um emparelhamento que tenha cardinalidade máxima dentre todos os emparelhamentos em G.
- **Emparelhamento perfeito em** G: emparelhamento que satura todos os seus vértices. Neste caso, n é par e $\mu(G)=\frac{n}{2}$.
- **Conjunto independente de vértices em** G: conjunto S de vértices do grafo G tal que não existem dois vértices adjacentes do grafo em S.

(II) Sejam G_1, G_2 grafos com conjuntos de vértices V_1 e V_2. **O produto cartesiano de** G_1 **por** G_2 é o grafo $G_1 \square G_2$ com conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$ e tal que

$$(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2) \text{ em } G_1 \square G_2 \Leftrightarrow$$

$$u_1 \sim u_2 \text{ em } G_1 \text{ e } v_1 = v_2 \text{ ou } u_1 = u_2 \text{ e } v_1 \sim v_2 \text{ em } G_2.$$

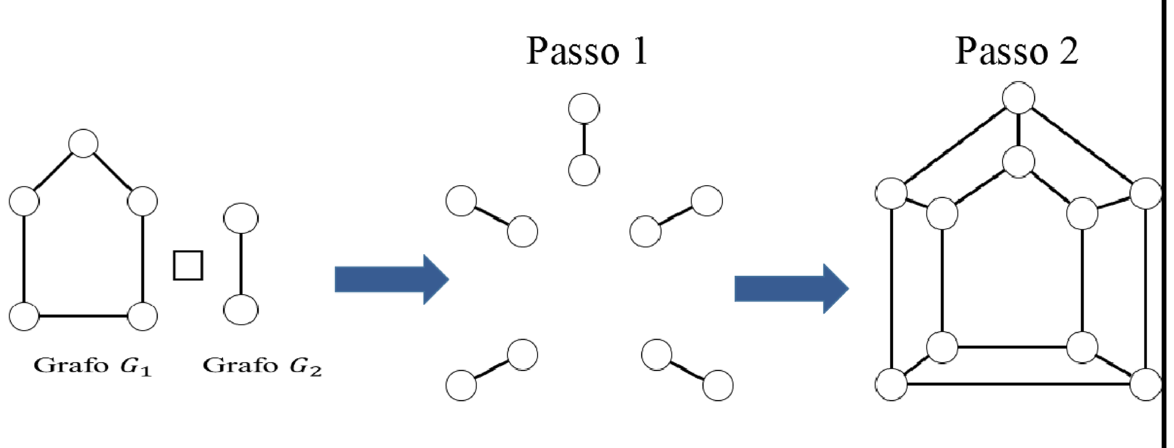

Figura 1: Ilustração de produto cartesiano.

Resultado:

No que se segue, exibe-se uma família infinita de grafos G sem empalhamento perfeito tal que G^2 possui emparelhamento perfeito. Descreve-se um método para encontrar um emparelhamento em G^2 para um elemento genérico da família.

Teorema 1. *Para todo inteiro $k \geq 3$ o grafo G_k, com $n = 2k$ vértices constituído por um caminho com $2k-4$ vértices e 2 vértices pendentes em cada extremidade, não possui emparelhamento perfeito, mas $G_k^2 = G_k \square G_k$ possui emparelhamento perfeito.*

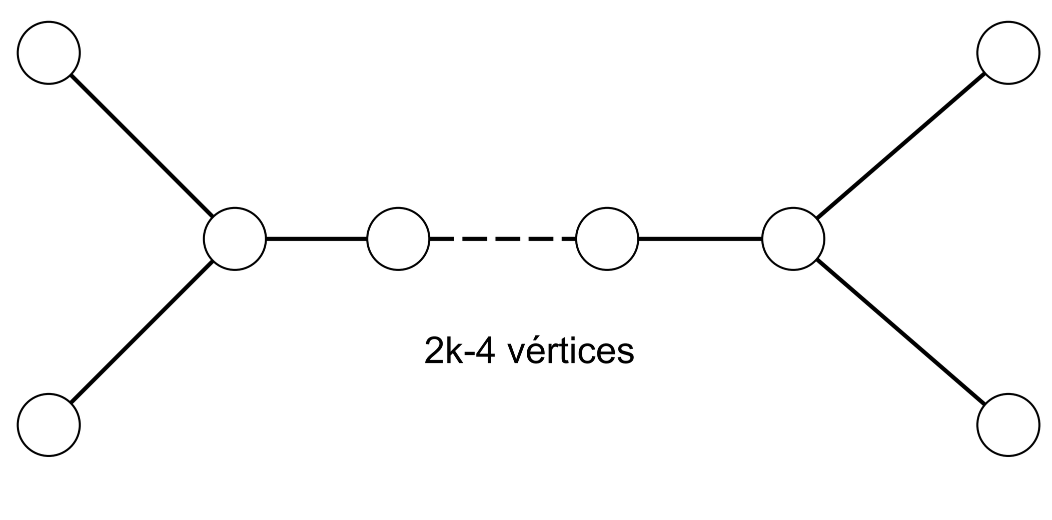

Figura 2: Família de grafos citada acima.

Demonstração:

Fixe-se $k > 3$ e $G_k = G$, como acima. Verifica-se que G possui $\mu = \mu(G) = k-1 < k = \frac{n}{2}$, e portanto, G não possui emparelhamento perfeito.

Para mostrar que $G^2 = G \square G$ posui emparelhamento perfeito, considera-se um emparelhamento máximo com vértices rotulados como

$$M = \{v_1v_k, v_2v_{k+1}, \ldots, v_{k-2}v_{2k-3}, v_{k-1}v_{2k-2}\}$$

em G, chamado de *emparelhamento máximo inicial*; e também um emparelhamento máximo

$$M' = \{v_kv_{2k-1}, v_2v_{k+1}, \ldots, v_{k-2}v_{2k-3}, v_{2k-2}v_{2k}\},$$

chamado de *emparelhamento máximo secundário.*

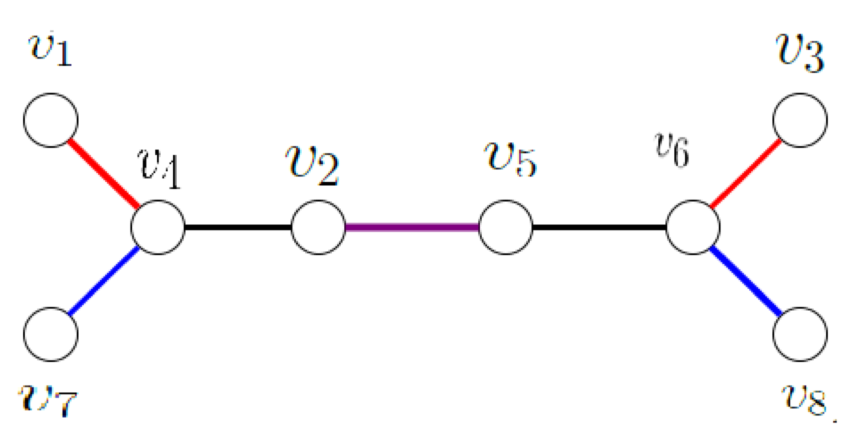

Figura 3: Grafo com a rotulação explicada acima. Em vermelho temos o emparelhamento M e em azul o M'. Aqui $R = \{v_1, v_2, v_3\}$, $T\{v_7, v_8\}$ e $Q = \{v_5\}$

Sejam $R = \{v_1, \ldots, v_\mu\}$, $T = \{v_{2k-1}, v_{2k}\}$ e $Q = \{v_{k+1}, v_{k+2}, \dot{;} v_{2k-3}\}$. Verifica-se que $S = R \cup T$ é um conjunto de vértices independentes de G com cardinalidade máxima, igual a $k+1$.

Para formar G^2, para cada vértice v_i de G; $1 \leq i \leq 2k$. considera-se uma cópia G_i de G cujos vértices serão rotulados v_{ij}; $1 \leq j \leq 2k$ de acordo com a rotulação inicialmente considerada para G. Depois, efetuam-se as ligações conforme a definição de produto cartesiano.

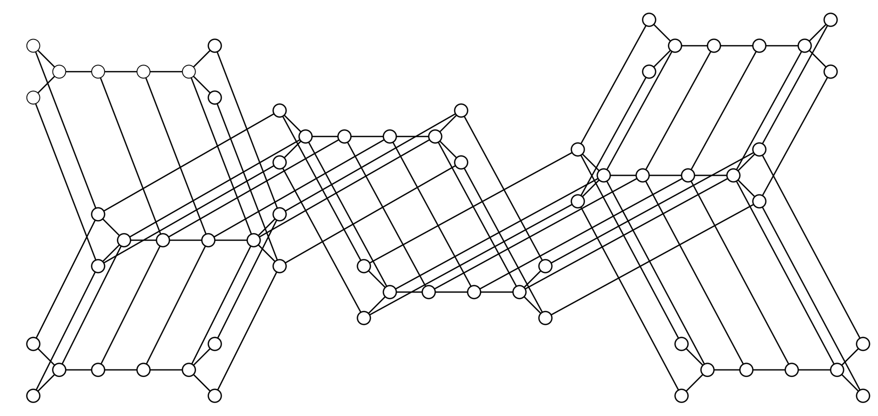

Figura 4: $G \square G$ para $n = 8$

ETAPA 1: Nas cópias de G correspondentes aos vértices pertencentes a R e Q, selecionam-se arestas correspondentes a M. Assim, para cada i, $1 \leq i \leq k-1$, selecionam-se na cópia G_i as arestas:

$$v_{(i)(1)}v_{(i)(k)}, v_{(i)(2)}v_{i(k+1)}, \ldots, v_{(i)(k-1)}v_{(i)(2k-2)}.$$

Para cada j, $k+1 \leq j \leq 2k-3$ selecionam-se na cópia G_j as arestas:

$$v_{(j)(1)}v_{(j)(k)}, v_{(j)(2)}v_{(j)(k+1)}, \ldots, v_{(j)(k-1)}v_{(j)(2k-2)}.$$

Assim, $|R| \cdot |M| + |Q| \cdot |M|$ arestas foram secionadas na etapa 1, isto é $\mu(G) \cdot \mu(G) + ((2k-3)-(k-1)+1) \cdot \mu(G) = (k-1)^2 + (k-3)(k-1) = 2k^2 - 6k + 4$ arestas selecionadas.

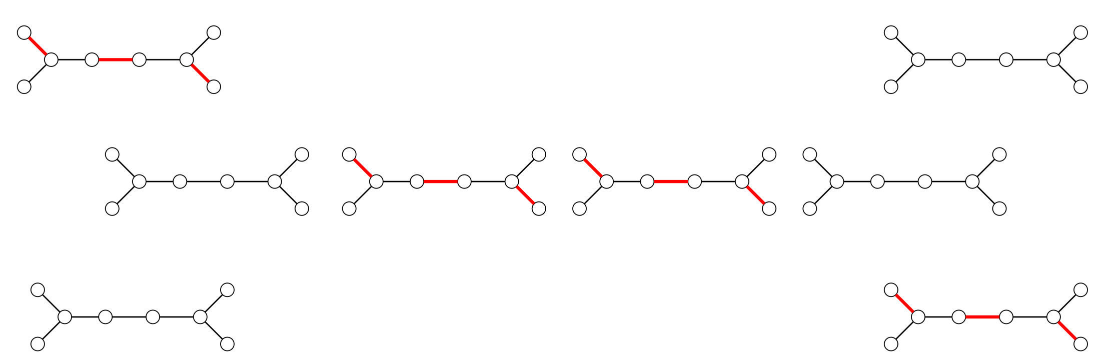

Figura 5: Etapa 1 ilustrada em $G \square G$ para n=8.

ETAPA 2: Nas cópias correspondentes aos vértices pertencentes a T, selecionam-se as arestas correspondentes ao M'. Assim, selecionam-se na cópia G_{2k-1} as arestas:

$$v_{(2k-1)k}v_{(2k-1)(2k-1)}, v_{(2k-1)2}v_{(2k-1)(k+1)}, \ldots, v_{(2k-1)(k-2)}v_{(2k-1)(2k-3)},$$

$$v_{(2k-1)(2k-2)}v_{(2k-1)2k}$$

e, na cópia G_{2k} as arestas:

$$v_{(2k)k}v_{(2k)(2k-1)}, v_{(2k)2}v_{(2k)(k+1)}, \ldots, v_{(2k)(k-2)}v_{(2k)(2k-3)},$$

$$v_{(2k)(2k-2)}v_{(2k)2k}$$

Selecionam-se então $|T| \cdot |M'|$ arestas, isto é, $2 \cdot \mu(G) = 2(k-1)$ arestas.

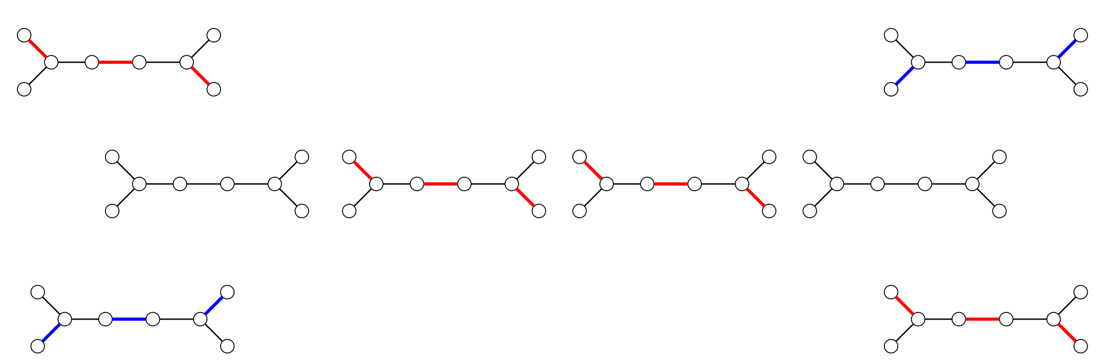

Figura 6: Etapa 2 ilustrada em $G \square G$ para n=8.

ETAPA 3: Nas cópias dos vértices de $S = R \cup T$, saturam-se os vértices que ainda não foram saturados. Para isto, selecionam-se as arestas que ligam aqueles vértices a vértices em outras cópias de G segundo a definição de G^2. Assim nas cópias dos vértices v_i com $1 \leq i \leq k-1$, que são os vértices de R, selecionam-se as arestas:

$$v_{(i)(2k-1)}v_{(k+i-1)(2k-1)}, v_{i(2k)}v_{(k+i-1)(2k)}$$

Como $T = \{v_{2k-1}, v_{2k}\}$, selecionam-se: na cópia de v_{2k-1} as arestas

$$v_{(2k-1)(1)}v_{(k)(1)}, v_{(2k-1)(k-1)}v_{(k)(k-1)};$$

e na cópia de v_{2k}, as arestas:

$$v_{(2k)(1)}v_{(2k-2)(1)}, v_{(2k-1)(k-1)}v_{(2k-2)(k-1)}$$

Desta forma, são selecionadas 2 arestas para cada vértice de S. Então $2 \cdot |R \cup T| = 2(|R| + |T|) = 2(k+1) = 2k+2$ arestas são selecionadas na etapa 3.

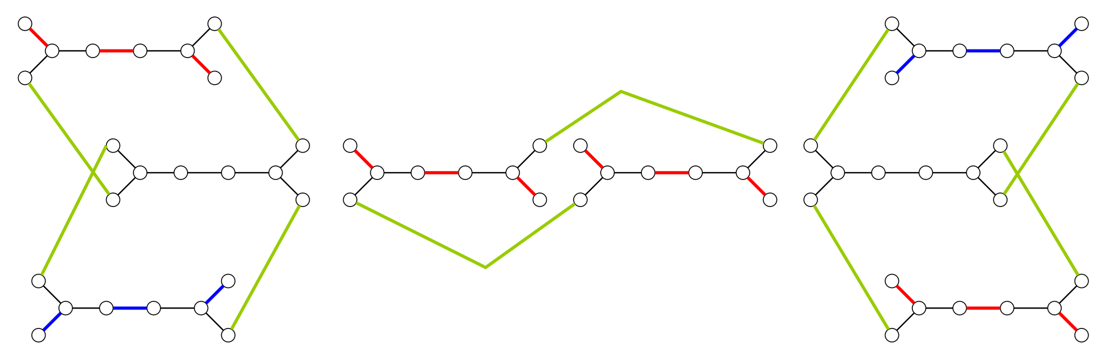

Figura 7: Etapa 3 ilustrada em $G \square G$ para n=8.

ETAPA 4: Resta selecionar arestas arestas independentes nos caminhos P_{2k-4} nas cópias dos vértices v_k e v_{k-2}. Assim na cópia de cada um destes vértices, seleciona-se um emparelhamento máximo no caminho P_{2k-4} existente. Assim são selecionadas $2 \cdot \mu(P_{2k-4}) = 2(k-2) = 2k-4$ arestas.

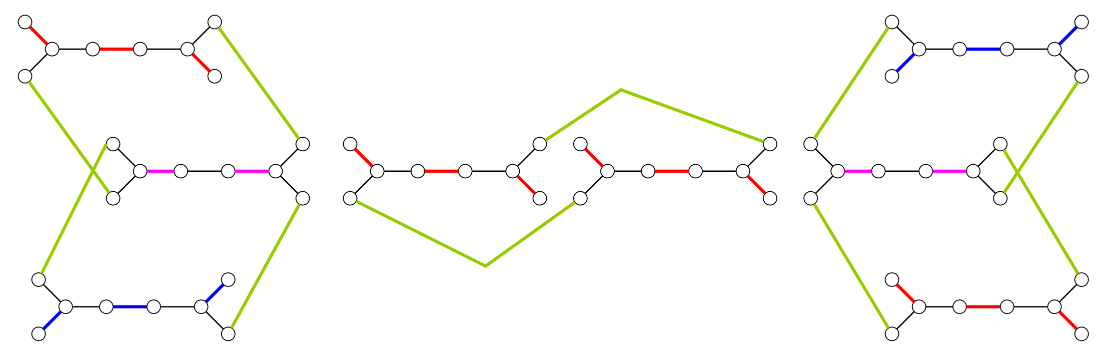

Figura 8: Etapa 4 ilustrada em $G \square G$ para n=8.

Portanto, sendo $n = 2k$, o total de arestas selecionadas em G^2 é $(2k^2-6k+4)+(2k+2)+(2k-2)+(2k-4) = 2k^2 = 2(\frac{n}{2})^2 = \frac{n^2}{2}$.

Assim, exibimos emparelhamento em G^2 com $\frac{n^2}{2}$ vértices. Daí, como G^2 tem n^2 vértices então G^2 tem emparelhamento perfeito.

Ilustração de G^2 para G com $n = 8$ ($k = 4$) com o emparelhamento perfeito selecionado:

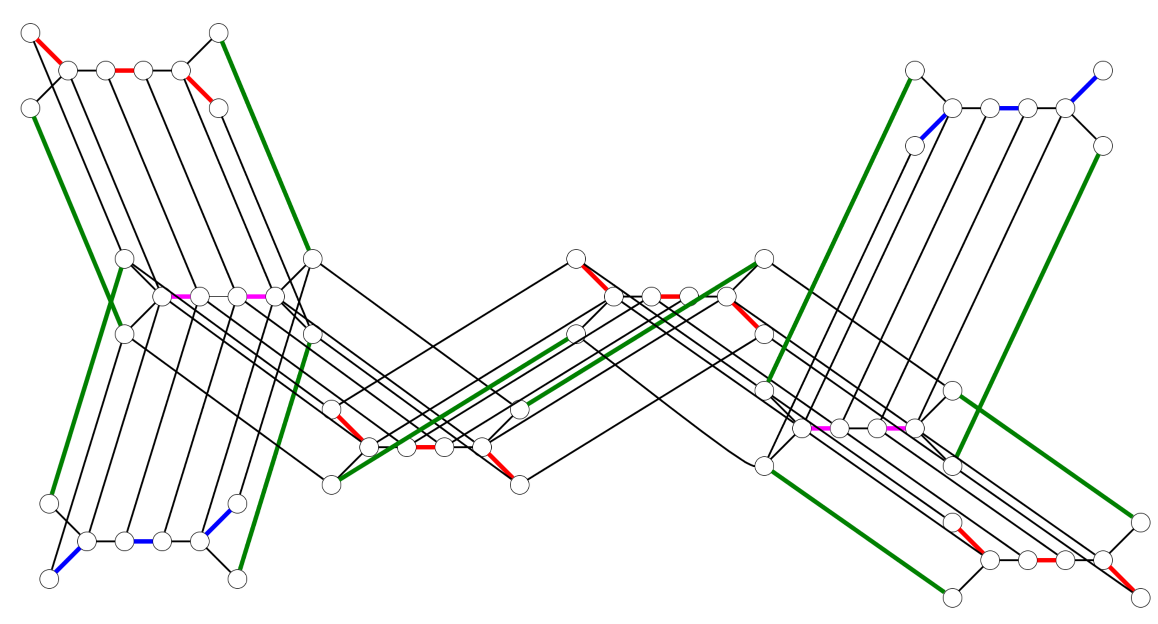

Figura 9: Emparelhamento perfeito selecionado em $G \square G$ para n=8.

Para a continuação do trabalho, pretende-se obter outras famílias com as propriedades acima mencionadas e, também investigar uma maneira de garantir a existência de emparelhamento perfeito em seus elementos usando propriedades de matrizes que se associam a grafos.

Referências

[1] Almeida, A.R., Propriedades do produto cartesiano de grafos. Tese de Doutorado, ICC/UFF, 2015

[2] J.A. Bondy, and U.S.R. Murty. *Graph Theory with Applications.* MacMillan, London, 1976.

[3] Hammack, W. Imrich and S. Klazar. Product of graphs: Structure and Recognition. 2nd edtion.*Wiley-Intersciense Series in Discrete Mathematics and Optimization.* vol. 56, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2011.

Camila S. Crispim agradece o apoio da FAPERJ através da bolsa de IC concedida.