Limites para Zeros dos Polinômios de Gegenbauer

Angélica Lourenço Oliveira
angelicaeh@ufu.br
Universidade Estadual de Campinas

Fernando Rodrigo Rafaeli
rafaeli@ufu.br
Universidade Federal de Uberlândia

Resumo

Visto que os zeros dos polinômios ortogonais são funções monótonas com relação aos seus parâmetros (Ver, [2]), iremos apresentar limitantes para os zeros dos polinômios ortogonais de Gegenbauer, que é um caso particular dos polinômios de Jacobi. Como ferramentas, utilizaremos uma relação existente entre estes zeros e os zeros dos polinômios de Laguerre e o Teorema de Stieltjes, que trata sobre a monotonicidade dos zeros de polinômios ortogonais simétricos.

Polinômios Ortogonais de Gegenbauer

Os polinômios de Gegenbauer, ortogonais em $(-1,1)$ com relação função peso

$$\rho(x;\alpha,\beta)=(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}},$$

são dados pela Fórmula de Rodrigues da seguinte forma

$$P_n^{(\lambda)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{[(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}+n}]^{(n)}}{(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}}.$$

Tais polinômios são soluções da seguinte equação diferencial, obtida a partir da equação hipergeométrica [2],

$$y''(x)+\frac{(2\lambda+1)x}{x^2-1}y'(x)+\frac{n(2\lambda+n)}{1-x^2}y(x)=0.$$

Limitantes para os Zeros

Teorema 1. ***(Stieltjes)*** *Seja $y(x,t)$ uma solução polinomial da equação diferencial $y''+Py'+Qy=0$. Suponha que $y(x,t)$ seja par no intervalo simétrico $(-a,a)$ e que $P(x,t)$ seja uma função decrescente de x para cada t. Suponha também que $P(x,t)$ seja uma função diferenciável e decrescente (resp. crescente) de t para cada x. Então os zeros positivos de $y(x,t)$ decrescem (resp. crescem) quando t cresce.*

Em [1] e em [4] foi estabelecida a seguinte relação entre os polinômios de Gegenbauer $P_n^{(\lambda)}$ e os polinômios de Hermite H_n,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^{-\frac{n}{2}}P_n^{(\lambda)}(\lambda^{\frac{1}{2}}x)=\frac{H_n(x)}{n!}.$$

Em [2] foi provado que os zeros $x_{n,j}(\lambda)$ dos polinômios de Gegenbauer são funções contínuas de λ e que eles são funções decrescentes no intervalo $(0,1)$ e crescentes em $(-1,0)$ com relação a λ. Fazendo a mudança de variável $x=\lambda^{\frac{1}{2}}z$ obtém-se o seguinte limite, que relaciona tais zeros,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^{\frac{1}{2}}x_{n,j}(\lambda)=h_{n,j},\ \ j=1:n.$$

Seja c uma constante que pode depender de n, mas que não depende de λ e defina $f=f_n(\lambda)=(\lambda+c)^{\frac{1}{2}}$. Logo, também vale o seguinte limite

$$\lim_{\lambda\to+\infty}(\lambda+c)^{\frac{1}{2}}x_{n,j}(\lambda)=h_{n,j}.$$

Vamos encontrar uma constante c tal que os valores $(\lambda+c)^{\frac{1}{2}}x_{n,j}(\lambda)$, $j=1,2,...,\frac{n}{2}$, sejam funções monótonas de λ.

Como os polinômios $P_n^{(\lambda)}(x)$ são ortogonais em $(-1,1)$, com relação a função peso $\rho(x;\alpha,\beta)=(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, então $P_n^{(\lambda)}(z/f)$ é ortogonal em $(-f,f)$ com relação à função peso

$$\rho(z;\lambda)=(f^2-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}},$$

para $\lambda>-\frac{1}{2}$

Observe que neste caso a função peso seria da forma $\rho(z;\lambda)=\left(\frac{f^2-z^2}{f^2}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}$. Porém a constante $f^{1-2\lambda}$ não interfere na propriedade de ortogonalidade nem na monotonicidade da função peso.

Os polinômios $P_n^{(\lambda)}(x)$ satisfazem a seguinte equação diferencial,

$$Y''(z)+z\frac{2\lambda+1}{z^2-f^2}Y'(z)+\frac{n(n+2\lambda)}{f^2-z^2}Y(z)=0,$$

com

$$Y(z)=y(z/f)=P_n^{(\lambda)}(z/f),$$

já que

$$y'(f/z)=fY'(z)$$

e

$$y''(f/z)=f^2Y''(z).$$

Seus zeros são da forma $z_{n,j}(\lambda)=x_{n,j}(\lambda)f_n(\lambda),\ \ j=1,...,n$.

Observe que

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z(2\lambda+1)}{z^2-f^2}\right)=-\frac{(2\lambda+1)(z^2+f^2)}{(z^2-f^2)^2}<0.$$

E mais,

$$\frac{\partial P}{\partial\lambda}=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(z\frac{2\lambda+1}{z^2-f^2}\right)=2z\frac{z^2-c+\lambda+1}{(z^2-f^2)^2}.$$

Temos que $\dfrac{\partial P}{\partial\lambda}\geq 0$ se, e somente se, $c\leq 1/2$. De fato, a desigualdade é verdadeira se, e somente se, $2z(z^2-c+\lambda+1)\geq 0$. Como $z\geq 0$, temos que a desigualdade vale se, e somente se, $z^2-c+\lambda+1\geq 0$.

Mas,

$$z^2-c+\lambda+1=z^2-c+1/2+\lambda+1/2.$$

Como $\lambda+1/2>0$, então a desigualdade vale se, e somente se, $c\leq 1/2$.

Daí pelo Teorema 1, para $c\leq\dfrac{1}{2}$, temos que as funções

$$(\lambda+c)^{\frac{1}{2}}x_{n,j}(\lambda)$$

são crescentes de λ e convergem para $h_{n,j}$, quando λ tende ao infinito.

Tomando $c=\dfrac{1}{2}$, obtemos $\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}x_{n,j}(\lambda)\leq h_{n,j}, j=1,2,...,\frac{n}{2}$. Ou, equivalentemente,

$$x_{n,j}(\lambda)\leq\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}h_{n,j}, j=1,2,...,\frac{n}{2}.$$

Disso, temos que o lado direito da inequação acima são limites superiores para os zeros positivos dos polinômios de Gegenbauer.

Em [3] os autores provaram que o melhor valor de c é dado por

$$c=\frac{2n^2+1}{4n+2}.$$

Ilustração Gráfica

Na imagem abaixo temos o comportamento dos zeros $z_{6,j}=x_{6,j}(\lambda+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$, com $j=1,2,3$, (linha contínua), com relação ao parâmetro λ, com $c=1/2$. Observe que cada zero $z_{6,j}(\lambda)$, $j=1,2,3$, é uma função crescente de λ e tende às raízes $h_{6,j}$, $j=1,2,3$, (linha pontilhada) quando $\lambda\to\infty$.

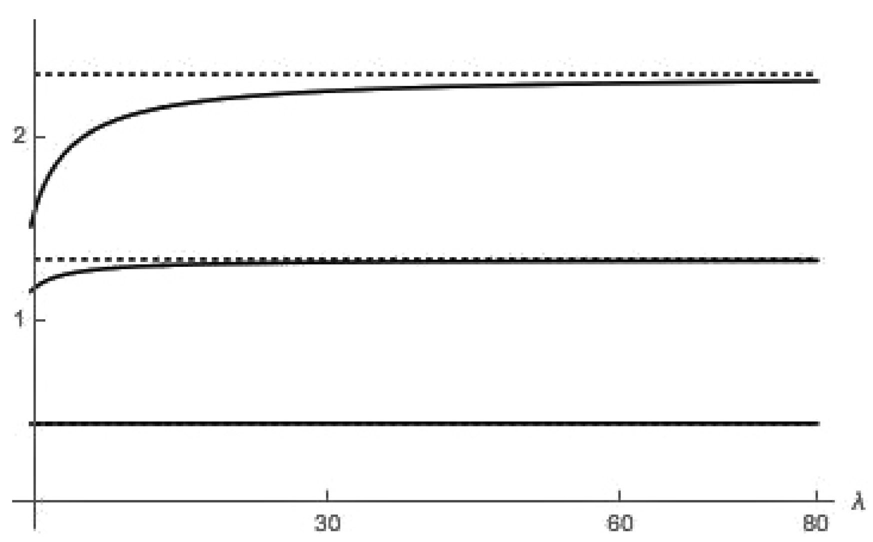

Figura 1: Gráfico dos zeros $z_{6,j}=(\lambda+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}x_{6,j}$, $j=1,2,3$.

Já a imagem abaixo mostra os limites superiores $h_{6,j}(\lambda+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$, (linha pontilhada), dos zeros positivos $x_{6,j}(\lambda)$, (linha contínua), dos polinômios de Gegenbauer $P_6^{(\lambda)}(x)$, com $j=1,2,3$.

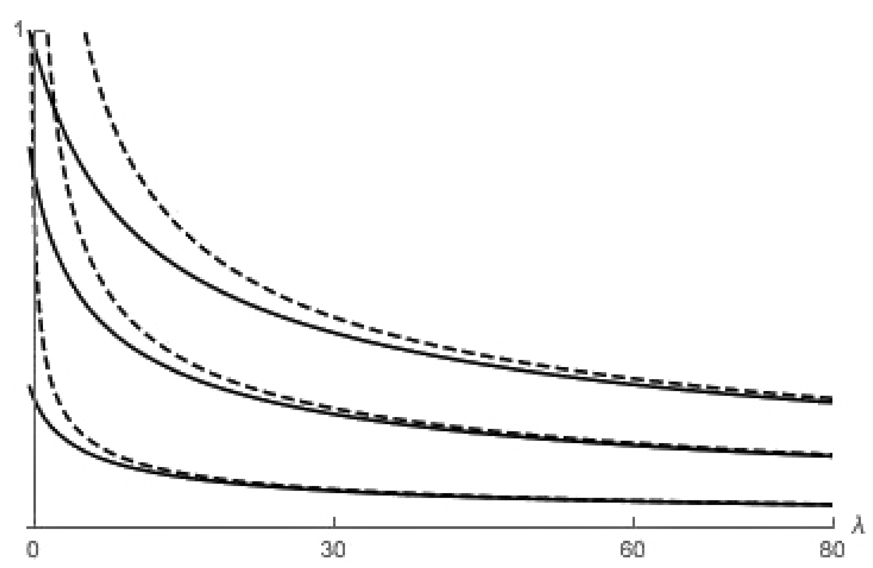

Figura 2: Limitantes superiores dos zeros positivos $x_{6,j}(\lambda)$ do Polinômio $P_6^{(\lambda)}(x)$.

Referências

[1] KoeKoek, R. and René, F. S., *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue.* Delft University of Technology and Faculty of Information Technology and Systems Report. no. 98/17, 1998.

[2] Oliveira, A. L., Rafaeli, F. R., *Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios Ortogonais Clássicos: Teoremas de Markov e Stieltjes.* Dissertação de Mestrado, 2017, UFU.

[3] Rafaeli, F. R., *Zeros de polinômios ortogonais na reta real* Tese de Doutorado, 2010, UNICAMP.

[4] Szegö, G., *Orthogonal Polynomials* International Standard Book Number, Colloquium publications v. 23, 1939.v