Endomorfismos de Anosov

Marisa Cantarino & Régis Varão

Imecc - Universidade Estadual de Campinas

ra211292@ime.unicamp.br

IMECC

UNICAMP

Resumo

Introduzimos o conceito de difeomorfismo de Anosov numa variedade fechada e suave e, para o caso não inversível, generalizamos esse conceito com a definição de endomorfismo de Anosov e o estudo das direções estáveis e instáveis utilizando o espaço de limite inverso. Apresentamos alguns exemplos e o fato de que para um ponto pode haver mais de uma direção instável. Mencionamos um resultado de Ali Tahzibi e Fernando Micena sobre as direções instáveis de um endomorfismo de Anosov.

Introdução

Consideramos M uma variedade Riemanniana C^∞ fechada (compacta, conexa, sem fronteira e de dimensão finita).

Definição 1. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo. Dizemos que f é um *difeomorfismo de Anosov* se para todo $x \in M$ existe uma decomposição $T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$ tal que

- $Df(x)E^{u(s)}(x) = E^{u(s)}(f(x))$;
- Existem constantes $c > 0$ e $\lambda > 1$ tais que
  $||Df^{-n}(x)v|| \leq c\lambda^{-n}||v||, \forall v \in E^u(x)$, (direção instável)
  $||Df^n(x)v|| \leq c\lambda^{-n}||v||, \forall v \in E^s(x)$. (direção estável)

Exemplos

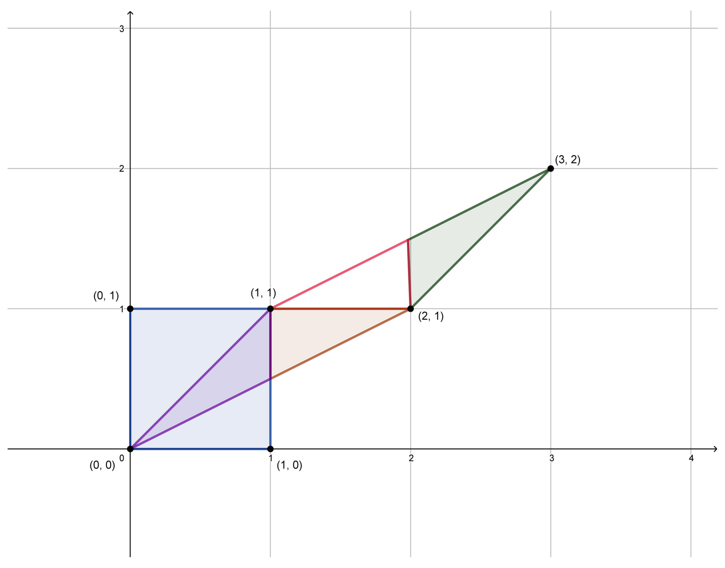

Figura 1: A matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ induz no toro um difeomorfismo de Anosov.

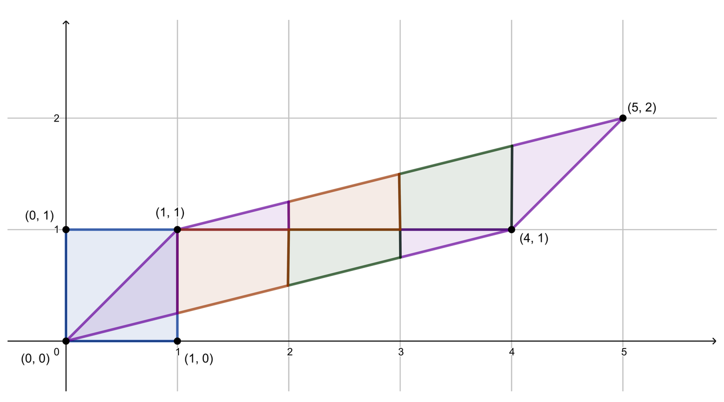

Figura 2: A matriz $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ induz no toro um endomorfismo que expande numa direção e contrai em outra, embora não seja inversível.

Em dimensão 2 e 3, toros são as únicas variedades que suportam difeomorfismos de Anosov [1] [4], e todo difeomorfismos de Anosov em $\mathbb{T}^n$ é topologicamente conjugado a um linear [2]. Por isso, queremos generalizar para o caso não inversível.

Espaço de limite inverso

Definição 2. Se (X, d) é um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ contínua. O *espaço de limite inverso* associado é $(\tilde{X}, \tilde{d})$, onde

- $\tilde{X} = \{\tilde{x} = (x_k) \in X^{\mathbb{Z}} : x_{k+1} = f(x_k), \forall k \in \mathbb{Z}\}$;
- $(\tilde{f}(\tilde{x}))_k = x_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{Z}$ e $\forall \tilde{x} \in \tilde{X}$; (shift)
- $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_k \dfrac{d(x_k, y_k)}{2^{|k|}}$.

$(\tilde{X}, \tilde{d})$ é espaço métrico compacto e $\tilde{f}$ é contínua e inversível.

Seja $\pi : \tilde{X} \to X$ projeção na coordenada $k = 0$. Temos $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$.

Definição 3. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local. Dizemos que f é um *endomorfismo de Anosov* se para todo $\tilde{x} \in \tilde{M}$ existe para todo $i \in \mathbb{Z}$ uma decomposição $T_{x_i}M = E^u(x_i) \oplus E^s(x_i)$ tal que

- $Df(x)E^{u(s)}(x) = E^{u(s)}(f(x))$;
- Existem constantes $c > 0$ e $\lambda > 1$ tais que
  $||Df^n(x_i)v|| \geq c^{-1}\lambda^n||v||, \forall v \in E^u(x_i), \forall i \in \mathbb{Z}$,
  $||Df^n(x_i)v|| \leq c\lambda^{-n}||v||, \forall v \in E^s(x_i), \forall i \in \mathbb{Z}$.

Exemplo de Przytycki

Teorema 1 (Przytycki [5]). *Seja A um endomorfismos de Anosov linear hiperbólico no toro $\mathbb{T}^m$ cuja matriz é simétrica. Seja $\sigma = |\det A|$ o grau de A. Sejam $\lambda_1, \mu_1 \in \operatorname{spec}(A)$ tais que $|\lambda_1| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \operatorname{spec}(A)\}$ e $|\mu_1| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \operatorname{spec}(A)$ e $|\lambda| < 1\}$.*

Se $\sigma - 1 > \frac{\lambda_1}{\mu_1}$, então para todo $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathbb{T}^m$ existem $f \in C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{T}^m)$ com $d_{C^1}(f, A) < \varepsilon$, e $R > 0$ tais que $\{\overline{W^u_{x_0,R}} : (x_n)_n \in \pi^{-1}(x)\} \cong [0, 1]$.

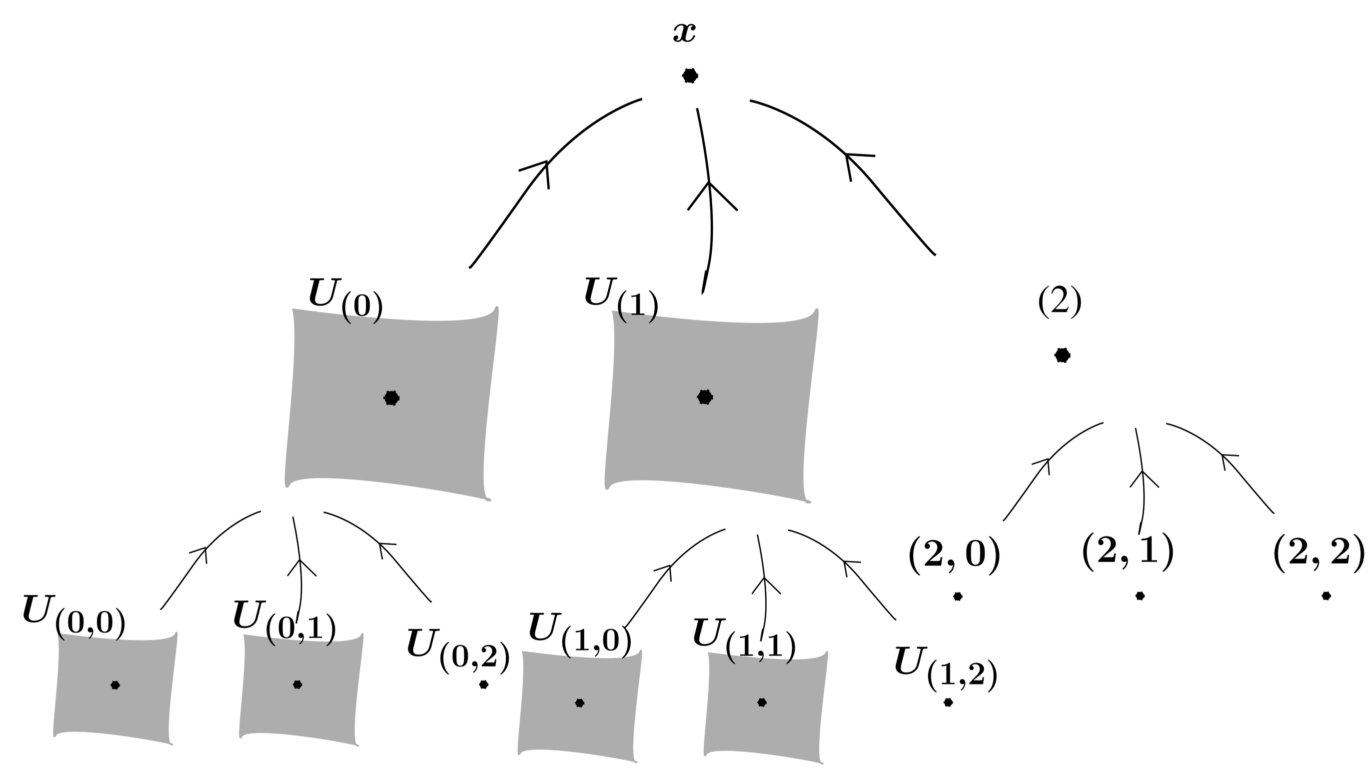

Figura 3: Perturbamos a função A nas vizinhanças U acima para gerar uma função f próxima que tenha infinitas direções instáveis no ponto x.

Além disso, Przytycki também mostrou que em toda vizinhanã de um endomorfismo de Anosov que não é expansão nem inversível existe uma quantidade não enumerável de endomorfismos que dois a dois não são semi-conjugados.

Teorema 2 (Micena-Tahzibi [3]). *Seja $f : M \to M$ um endomorfismo de Anosov transitivo. Então*

1. f é especial ou

2. existe $\mathcal{R} \subseteq M$ residual tal que todo $x \in \mathcal{R}$ tem infinitas direções instáveis.

Conclusão

Os endomorfismos de Anosov não são estruturalmente estáveis, apesar de terem várias propriedades em comum com o caso inversível. Diversos resultados da dinâmica hiperbólica assumem inversibilidade. Uma possibilidade de estudo é verificar se valem resultados semelhantes para endomorfismos.

Referências

[1] John Franks. Anosov diffemorphisms, Global analysis. In *Proc. Sympos. Pure Math.*, volume 14, pages 61–93, 1970.

[2] Anthony Manning. There are no new Anosov diffeomorphisms on tori. *Amer. J. Matemática*, 96(3):422–429, 1974.

[3] Fernando Micena and Ali Tahzibi. On the unstable directions and Lyapunov exponents of Anosov endomorphisms. *Fundamenta Mathematicae*, 1(235):37–48, 2016.

[4] Sheldon E Newhouse. On codimension one Anosov diffeomorphisms. *Amer. J. Matemática*, 92(3):761–770, 1970.

[5] Feliks Przytycki. Anosov endomorphisms. *Studia mathematica*, 3(58):249–285, 1976.

Agradecemos o apoio financeiro da CAPES.