LOCALIZAÇÃO DINÂMICA PARA PERTURBAÇÕES DE OPERADORES COM ESPECTRO DISCRETO

Mariane Pigossi

Universidade Federal do Espírito Santo

mariane.pigossi@ufes.br

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Introdução

Estudamos propriedades espectrais e dinâmicas de operadores de Schrödinger obtidos por perturbações do operador auto-adjunto e não limitados H_1, agindo em $\ell^2(\mathbb{Z})$, com espectro discreto cujos autovalores $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ satisfazem

$$|\lambda_m - \lambda_n| \geqslant \beta, \quad \forall\, m \neq n, \tag{1}$$

para algum $\beta > 0$. As correspondentes autofunções de H_1 são denotadas por $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$. Consideremos as perturbações autônomas M. Apresentaremos condições suficiente para persistência de espectro pontual puro e localização dinâmica para certas pertubações; devido a (1), um argumento geral (Veja Teorema 4.1 in [3]) implica que para toda perturbação limitada de H_1 tem espectro discreto, contudo, para provar localização dinâmica precisamos de informações sobre as autofunções, empregaremos uma versão adaptada para a teoria espectral da técnica KAM.

Resultados

Considere o operador de Schrödinger H, agindo no espaço de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$, cuja ação

$$(H\psi)(n) := (H_1\psi)(n) + (M\psi)(n), \qquad \psi \in l^2(\mathbb{Z}), \tag{2}$$

com ambos H_1 e M operadores auto-adjunto e H_1 conforme discutimos acima.

Estamos particularmente interessados em estudar uma propriedade dinâmica chamada *localização dinâmica* (veja [5] e suas referências), a qual é dada pelos momentos

$$r_\psi^p(t) := \langle e^{-itH}\psi, |X|^p\, e^{-itH}\psi\rangle$$

de ordem $p > 0$, onde $|X|$ denota o valor absoluto do operador posição $(|X|^p\psi)(n) = |n|^p\psi(n)$; eles medem a rapidez com que a dinâmica se espalha pela rede $\mathbb{Z}$, em particular se esse espalhamento cessa ou no. Seja (e_n) a base usual de $\ell^2(\mathbb{Z})$, isto é, $e_n(m) = \delta_{nm}$. Dizemos que H tem localização dinâmica se, para toda condição inicial e_n, cada momento é uniformemente limitado no tempo, i.e., para cada $p > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$,

$$\sup_t r_{e_n}^p(t) < \infty\,. \tag{3}$$

Uma forma de provar essa propriedade é através de um certo controle das autofunções do operador perturbado H dito SULE (Semi-Uniformly Localized Eigenfunctions) [5], isto é, existe $\alpha > 0$ e, para cada autofunção φ_m, um $n_m \in \mathbb{Z}$ tal que, para qualquer $\delta > 0$,

$$|\varphi_m(n)| \leqslant C(\delta)\, e^{\delta|n_m| - \alpha|n-n_m|}, \quad \forall n,$$

com algum parâmetro $C(\delta)$ para todo m.

Sabe-se que a localização dinâmica requer espectro de ponto puro do Hamiltoniano H; no entanto, existem exemplos de sistemas com comportamento incomum, isto é, espectro de ponto puro sem localização dinâmica [4].

Seja $\gamma := 5^{-1}\prod_{j=0}^{\infty} 2^{-(j+2)/2^{j+1}}$. Nosso resultado foi:

Theorem 0.1. *Fixe $r > 0$. Seja H_1 o operador não perturbado, $\{\psi_m\}$, β e γ como acima. Se a perturbação M satisfaz*

$$\|M\|_r < \min\left\{\frac{\beta}{2}, \gamma\right\},$$

então existe um operador unitário $P \in \mathcal{A}_r$ tal que

$$P^{-1}(H_1 + M)P$$

é diagonal com espectro discreto e cujas autofunções são $\{P\psi_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$. Além disso, se existe $c_1 > 0, \rho > 0$, tal que

$$|(P\psi_m)(n)| \leqslant c_1\, e^{-\rho|n-m|}, \quad \forall n, m,$$

então $H = H_1 + M$ tem localização dinâmica.

Estratégia da demonstração0.1 Denotemos por $D_0 = H_1$, $M_d = diag M$ então

$$D + \epsilon M = (D + \epsilon M_d) + \epsilon(M - M_d) =: D_1 + \epsilon M_1.$$

Passo 1 Se os autovalores $(\lambda_j^1)_{j\in\mathbb{Z}}$ de D_1 satisfazem

$$|\lambda_n^1 - \lambda_m^1| > K_1, \ \ \forall n \neq m$$

para alguma constante $K_1 > 0$ então existe $W_1 \in \mathcal{A}_r$ invertível tal que

$$\left(W^1\right)^{-1}(D + \epsilon M)W_1 =: D_2 + \epsilon^2 M_2,$$

sendo D_2 diagonal. Agora vamos iterar este processo. Supondo válido o $k-1$-ésimo passo, isto é,

$$(W_{k-1})^{-1}\cdots(W_1)^{-1}(D + M)(W_1)\cdots(W_{k-1}) = D^k + \epsilon^{2^{k-1}}M^k, \tag{4}$$

com D^k um operador diagonal.

k-ésimo passo Se os autovalores $(\lambda_j^k)_{j\in\mathbb{Z}}$ de D_k satisfazem

$$|\lambda_n^k - \lambda_m^k| > K_k, \ \ \forall n \neq m$$

para alguma constante $K_k > 0$ então existe $W_k \in \mathcal{A}_r$ invertível tal que

$$(W_k)^{-1}\cdots(W_1)^{-1}(D + \epsilon M)W_1\cdots W^k =: D_{k+1} + \epsilon^{2k}M_{k+1}, \tag{5}$$

sendo D_{k+1} diagonal. Um ponto importante é que a cada passo a ordem da perturbação é reduzida de ϵ^{2^k} para $\epsilon^{2^{k+1}}$. Tomando o limite quando $k \to \infty$ em (5) obtém-se

$$P^{-1}(D + M)P = \widetilde{D} = \text{operador diagonal},$$

sendo $P = \lim_{k\to\infty} W^0 W^1 \cdots W^{k-1}$.

Para completar a prova da diagonalização, é necessário verificar que no $k-$ésimo passo todos os autovalores são simples, é suficiente impor que a soma de todas as correções dos autovalores são menores do que $\beta/2$, isto é, impomos que

$$\sum_k |M_{nn}^k| = \sum_k |(\text{diag}\, M^k)_{nn}| < \frac{\beta}{2} \tag{6}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ (como no caso $|\lambda_n^k - \lambda_m^k| > 0$, para todo $n \neq m$ e todo $0 \leq k \leq \infty$).

Referências

[1] Aloisio, M., Carvalho, S.L., de Oliveira, C.R.: Quantum quasiballistic dynamics and thick point spectrum. Lett. Math. Phys. (2019) https//doi.org/10.1007/s11005-019-01166-y

[2] Combescure, M.: The Quantum stability problem for time-periodic perturbations of the harmonic oscillator. Ann. Inst. H. Poincaré 47, 63–83 (1987). Erratum: Ann. Inst. H. Poincaré 47, 451–454 (1987)

[3] de Oliveira, C.R., Pigossi, M.: Proof of dynamical localization for perturbations of discrete 1D Schrödinger operators with uniform electric fields. Math. Z. 291, 1525–1541 (2019)

[4] de Oliveira, C.R., Simsen, M.S.: A Floquet operator with purely point spectrum and energy instability. Ann. H. Poincaré 8, 1225–1277 (2007)

[5] Tcheremchantsev, S.: How to prove dynamical localization. Commun. Math. Phys. 221, 27–56 (2001)