Isometrias do Plano Hiperbólico

Isabelle Siqueira da Costa

Universidade Federal do Pará

cselebasi@gmail.com

Resumo

O objetivo deste trabalho é mostrar que as isometrias do Plano Hiperbólico são as Transformações de Möbius. Também, é apresentada a classificação das Transformações de Möbius em termos de seus traços. Esse estudo faz parte de um projeto de Iniciação Científica (PIVIC/UFPA) orientado pelo Prof° Dr. Marcel Bertolini.

Definição: O plano hiperbólico, denotado por $\mathbb{H}^2$, é o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ com a parte imaginária positiva.

$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}\,;\; z = x+iy.$

Para definir a **métrica hiperbólica** $d_{\mathbb{H}^2}$, primeiro definiremos o comprimento hiperbólico de uma curva γ parametrizada por

$$t \mapsto (x(t), y(t)), a \leq t \leq b$$

é definido como

$$l_{\mathbb{H}^2}(\lambda) = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt.$$

Definição: A métrica hiperbólica, denotada por $d_{\mathbb{H}^2}$, é definida como

$$d_{\mathbb{H}^2} = \inf\{l_{\mathbb{H}^2}(\lambda);\; \lambda \; vai \; de \; P \; para \; Q\}.$$

Definição: Uma transformação de Möbius é uma funcão $T : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$, da forma:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d};$$

onde

$$a, b, c, d \in \mathbb{R},\; ad - bc = 1.$$

Teorema: $\varphi : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ é uma isometria em $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$ se, e somente se, $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ou $\varphi(z) = \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$.

Demonstração. ($\Leftarrow$)Para provar a volta do teorema precisamos dos resultados a seguir:

Proposição: Sejam as funções,

$$\varphi(x, y) = (\lambda x, \lambda y),\; \lambda > 0$$

$$\psi(x, y) = (x + x_0, y),\; x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\theta(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

respectivamente definidas como homotetia, translação horizontal, e inversão. Assim, φ, ψ, θ são isometrias do $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$.

Demonstração. Seja γ uma curva diferenciável por partes, parametrizada por

$$t \mapsto (x(t), y(t)), a \leq t \leq b.$$

Então:

i) $\varphi(\lambda)$ é parametrizada por

$$t \mapsto (\lambda x(t), \lambda y(t)), a \leq t \leq b.$$

Portanto,

$$l_{\mathbb{H}^2}(\varphi(\gamma)) = \int_a^b \frac{\sqrt{\lambda^2 x'(t)^2 + \lambda^2 y'(t)^2}}{\lambda y(t)} dt$$

$$= \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt = l_{\mathbb{H}^2}(\gamma)$$

ii) $\psi(\gamma)$ é parametrizada por

$$t \mapsto (x(t) + x_0, y(t)), a \leq t \leq b.$$

Logo,

$$l_{\mathbb{H}^2}(\psi(\gamma)) = \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t)+x_0')^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$$

$$= \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt = l_{\mathbb{H}^2}(\gamma)$$

iii) $\theta(\gamma)$ é parametrizada por

$$t \mapsto (x_1(t), y_1(t)), a \leq t \leq b$$

onde,

$$x_1(t) = \frac{x(t)}{x(t)^2+y(t)^2}\,;\; y_1(t) = \frac{y(t)}{x(t)^2+y(t)^2}$$

Portanto,

$$l_{\mathbb{H}^2}(\theta(\gamma)) = \int_a^b \frac{\sqrt{x_1'(t)^2 + y_1'(t)^2}}{y_1(t)} dt$$

$$= \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt = l_{\mathbb{H}^2}(\gamma)$$

Segue a proposição. □

Proposição: A composição de duas isometrias é uma isometria.

Teorema: Toda Tranformação de Möbius é obtida por composições de translações horizontais, multiplicação por $\lambda \in \mathbb{R}$ e a inversão.

Pelos resultados acima, concluímos que toda Transformação de Möbius é uma isometria do $\mathbb{H}^2$. Verifiquemos agora a ida.

($\Rightarrow$)Seja φ uma isometria do $\mathbb{H}^2$, e $L = \{iy; y > 0\}$ uma geodésica completa. A imagem de φ sobre L é um semi-círculo euclidiano limitado pelos pontos distintos $u, v \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Sejam os casos:

1° caso) u e v são ambos diferentes de ∞. A isometria hiperbólica

$$\psi(z) = \frac{az - au}{cz - cv},$$

com $a, c \in \mathbb{R}$ tal que $ac(u-v) = 1$ leva u em 0 e v em ∞. Desde que $\psi \circ \varphi$ preserve a orienteção de L, a única possibilidade é que $\psi \circ \varphi(iy) = iy,\; \forall y > 0$.

Pelo Lema 2.10 [1], concluimos que $\psi \circ \varphi(z) = z$ ou $\psi \circ \varphi(z) = -\bar{z}$. Em ambos os casos, $\varphi(z)$ é do tipo requisitado.

2° caso) u ou v é ∞. O argumento é idêntico, usando as isometrias

$$\psi(z) = \frac{-a}{cz - cv}\,;\; \psi(z) = \frac{az - au}{c}$$

com $ac = 1$ quando $u = \infty$, e com $ac = 1$ quando $v = \infty$, respectivamente. □

Definição: Uma transformação de Möbius é dita hiperbólica, parabólica ou elíptica, se ela possui, respectivamente:

i)exatamente dois pontos fixos em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

ii) um único ponto fixo em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

iii) um único ponto fixo em $\mathbb{H}^2$.

Lema: É possivel mover qualquer ponto em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ para 0 ou ∞ e mover qualquer ponto em $\mathbb{H}^2$ para i com as Transformações de Möbius.

Teorema: Seja T uma Transformação de Möbius com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$, tal que T não é a identidade, e $\tau(T) = (a+d)^2$. Então:

i) T é parabólica se, e somente se $\tau(T) = 4$

ii) T é elíptica se, e somente se $\tau(T) \in [0, 4)$;

iii) T é hiperbólica se, e somente se $\tau(T) \in (4, \infty)$.

Demonstração. Usando o lema acima:

i) fixemos o ponto ∞. Assim,

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$$

Ora, $z = \infty \Rightarrow c = 0$. Daí,

$$\frac{az+b}{d} = z \Rightarrow z = \frac{b}{d-a} \Rightarrow d = a$$

Essa transformação pode ser representada pela matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, onde $a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow \tau(T) = 4$

ii) fixemos o ponto i. Temos,

$$T(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = i$$

$$\Rightarrow b + c + (a-d)i = 0$$

Isso significa que ou $a = d$ ou $b = -c$ Assim, $ad - bc = a^2 + b^2 = 1$.

$$a = \cos(\theta) \; e \; b = \sin(\theta) 0 \leq \theta < 2\phi$$

Essa transformação pode ser representada pela matriz $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \Rightarrow \tau(T) < 4$.

iii) fixemos os pontos 0 e ∞. Para o ponto ∞ procedemos como no item i) e obtemos $c = 0$. Agora, consideremos 0 como ponto fixo. Então,

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{b}{d} = o \Rightarrow b = 0$$

Essa transformação pode ser representada pela matriz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, onde

$$ad = 1 \Rightarrow d = a^{-1} \Rightarrow \tau(T) > 4$$

. □

Referências

[1] Francis Bonahon. *Low-dimensional geometry: From Euclidean surfaces to hyperbolic knots*, volume 49. American Mathematical Soc., 2009.