Extensões por Grafo e Amenidade

Elaine Rocha & Manuel Stadlbauer

Universidade Federal do Vale do São Francisco; Universidade Federal do Rio de Janeiro

elaine.ferreirar@univasf.edu.br

RESUMO

Nós caracterizamos amenidade de grafos através de extensões por grafo de aplicações de Markov, inspirado nos resultados de Stadlbauer e Jaerisch para extensões por grupo. Apresentaremos resultados no contexto de extensões por grafo de uma aplicação Gibbs-Markov completa, embutida e uma não-uniformemente expansora.

INTRODUÇÃO E DEFINIÇÕES

O critério de amenidade de Kesten e Day são resultados clássicos da teoria da probabilidade. Eles relacionam a amenidade de um grupo com o decaimento exponencial da probabilidade de retorno e o raio espectral do operador de Markov associado, respectivamente. Um caminho aleatório dirigido por um sistema dinâmico é modelado por uma extensão por grupo (e generaliza caminhos aleatórios clássicos em grupos).

Definição 1. *Um grupo G é ameno se existe uma sequência (K_n) de subconjuntos finitos de G com $\cup_{n=1}^{\infty} K_n = G$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} |gK_n \triangle K_n|/|K_n| = 0; \forall g \in G.$$

Definição 2. *Seja $f : X \to X$, G um grupo enumerável e $\gamma : X \to G$. A extensão por grupo é definida por*

$$T : X \times G \to X \times G; (x, g) \mapsto (f(x), g\gamma(x)).$$

Observação 3. *Estamos interessados no tempo de evolução da segunda coordenada, ou seja, de $(\gamma_n(x))$, com*

$$\gamma_n(x) := \gamma(x)\gamma(f(x))\cdots\gamma(f^{n-1}(x)).$$

Os resultados de Stadlbauer e Jaerisch

Seja $I \subset \mathbb{N}$ e $\gamma : I \to G$. Para $X := I^{\mathbb{N}}$, a extensão por grupo associada é $T : X \times G \to X \times G; ((w_0 w_1 \cdots), g) \mapsto ((w_1, \cdots \mapsto), g\gamma(w_0))$. Fixe uma função potencial $\varphi : X \to (0, \infty)$ tal que $\log \varphi$ é Hölder.

Definição 4. *O operador de Ruelle $\mathcal{L}$ é definido por, para $\psi : X \times G \to \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{L}(\psi)(x, g) := \sum_{T(y,h)=(x,g)} \varphi(y)\psi(y, h).$$

Teorema 5 (Stadlbauer (2013) e Jaerisch (2015))**.** *Seja $(X \times G, T)$ topologicamente transitiva e $||\mathcal{L}(1)||_\infty < \infty$.*

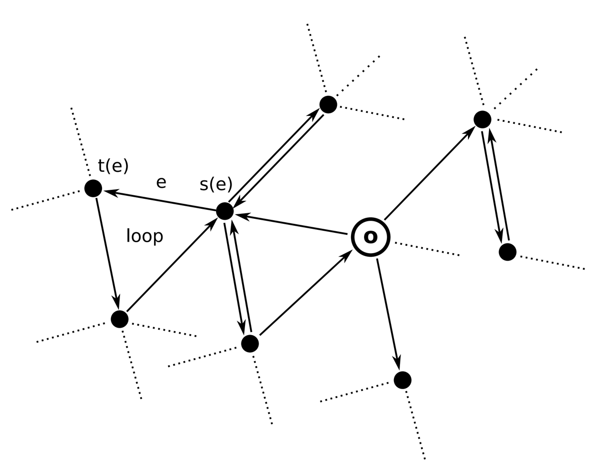
a) Se T e φ são simétricos, então amenidade de G implica que a pressão de Gurevic de f e T coincidem.

b) Se a pressão de Gurevic de f e T coincidem, então G é ameno.

c) G é ameno se, e somente se, $\rho(L) = \rho(\mathcal{L})$, onde ρ se refere ao raio espectral.

EXTENSÃO POR GRAFO

Um grafo é um par ordenado $\mathcal{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ onde V é um conjunto enumerável de vértices e $\mathrm{E} \subset \mathrm{V} \times \mathrm{V}$ são arestas (direcionadas).



Definição 6. *Suponha que (X, f) é uma aplicação de Markov com respeito a partição α e $\mathcal{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ um grafo. Seja $\kappa : X \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}, (x, g) \mapsto \kappa_x(g)$ tal que, para todo $x \in X$ e $g \in \mathrm{V}$,*

1) $\kappa_x : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ é uma bijeção, e $(g, \kappa_x(g)) \in \mathrm{E}$,

2) $x \mapsto \kappa_x$ é constante em elementos da partição α.

A extensão (Y, T, κ) por grafo $\mathcal{G}$ através de κ é definida por

$$T : X \times \mathrm{V} \to X \times \mathrm{V}, (x, g) \mapsto (f(x), \kappa_x(g)).$$

Definição 7 (Grafo ameno com peso (JRS, 2016))**.** *Um grafo $\mathcal{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ é um grafo com peso $p : \mathrm{E} \to [0, 1]$ se para todo $v \in \mathrm{V}$, temos $\sum_{e:s(e)=v} p(e) = 1$. Para $\epsilon > 0$ e $K \subset \mathrm{V}$, a ϵ-fronteira de K é definida por*

$$\partial^\epsilon K := \{v \in K : \exists e \in \mathrm{E} \text{ tal que } s(e) = v, t(e) \notin K, p(e) > \epsilon\}.$$

Então $\mathcal{G}$ é ameno com peso se

$$\liminf_{\epsilon\to 0} \left\{ \frac{|\partial^\epsilon K|}{|K|}; K \subset \mathrm{V}, |K| < \infty \right\} = 0$$

Observação 8. *Em algumas aplicações, o peso é dado por $p(e) = \mu(\{x : \kappa_x(s(e)) = t(e)\})$, onde μ é a medida de φ-equilíbrio para f.*

RESULTADOS PARA APLICAÇÕES GIBBS-MARKOV

Assuma que μ é uma medida de probabilidade invariante com a propriedade de Gibbs-Markov. Nesta situação, $\mathcal{L}$ é o operador de Transferência. Além disso, assuma que a propriedade de loops uniformes é satisfeita: existe um conjunto finito J de I tal que, para cada $g \in \mathrm{V}$, existe $w \in J$ com $\kappa_w(g) = g$.

Teorema 9 (JRS, 2017)**.** *Suponha que $(X \times \mathrm{V}, T)$ é uma extensão por grafo com loops uniformes de uma aplicação Gibbs-Markov completa (X, f, μ) com ramos completos e probabilidade invariante μ. Então, as afirmações a seguir, são equivalentes.*

i) O grafo $\mathcal{G}$ com peso é ameno.

ii) $\rho(\mathcal{L}) = 1$.

iii) Para cada $\epsilon > 0$, existe $A \subset \mathrm{V}$ finito, tal que

$$\int |\mathcal{L}(1_{X\times A}) - (1_{X\times A})| d\mu \leq \epsilon \#(A).$$

RESULTADOS PARA APLICAÇÕES GIBBS-MARKOV GERAL

Teorema 10 (JRS, 2017)**.** *Suponha que $\mu(X) = 1$. Então $\mathcal{G}$ é μ-ameno se, e somente se, existe uma sequência κ Folner: existe (K_n), $K_n \subset \mathrm{V}$ tal que, para todo $x \in X, k \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\kappa_{f^k(x)\circ\cdots\circ\kappa_x(K_n)\setminus K_n}|}{|K_n|} = 0$$

Assuma que $f : (X, \mu) \to (X, \mu)$ seja uma aplicação de Markov não-invertível, não-singular e com estrutura de Gibbs-Markov embutida: existe $\Omega \subset X$ e $\eta : \Omega \to \mathbb{N}$ tal que $\sigma : \Omega \to \Omega, x \mapsto f^{\eta(x)}(x)$ é uma aplicação de Gibbs-Markov completa com medida invariante ν equivalente a μ. Então, $S : \Omega \times \mathrm{V} \to \Omega \times \mathrm{V}$, $S(x, g) = T^{\eta(x)}(x, g)$ é uma extensão por grafo como um Teorema 9. Seja

$$R_\Omega(T) := \limsup_{n\to\infty} \{ \sqrt[n]{\mu(\{x \in \Omega \cap \theta^{-n}(\Omega) : \kappa_x^n(\mathrm{o}) = \mathrm{o}\})} \}.$$

Teorema 11 (JRS, 2017)**.** *Seguem as seguintes implicações*

$$\begin{array}{ccccc}
R(T) = 1 & \Longleftarrow & R_\Omega(T) = 1 & & \mathcal{G}\ \mu\text{-amenable} \\
 & & \Downarrow\Uparrow & & \Downarrow\Uparrow \\
 & & R(S) = 1 & \begin{array}{c}\Longleftarrow \\ \Longrightarrow\end{array} \ \rho(\widehat{S}) = 1 & \Longleftrightarrow \ \mathcal{G}\ \nu\text{-amenable}
\end{array}$$

Referências

[1] P. Gerl; Amenable groups and amenable graphs. *In Harmonic analysis (Luxembourg, 1987)*, volume 1359 of *Lecture Notes in Math.*, pages 181-190. Springer, Berlin, 1988.

[2] J. Jaerisch; Group extended Markov Systems, amenability,and the Perron-Frobenius operator. Procedings of the AMS.

[3] V. Pinheiro; Expanding measures. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 28:889 939, 2011.

[4] M. Stadlbauer; An extension of Kesten's criterion for amenability to topological Markov chains. *Advances in Mathematics* 235 (2013) 450-468.2011.