Classificação dos Espaços Sub-Homogêneos de Tipo Engel

Dulce Mary de Almeida

Universidade Federal de Uberlândia

dulce.almeida@ufu.br

impa Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Neste trabalho obtemos um paralelismo sobre uma estrutura sub-Riemanniana de tipo Engel e classificamos todos os espaços sub-homogêneos, simplesmente conexos, equipados com distribuição de Engel, usando uma linearização canônica dessa estrutura.

Introdução

Uma *variedade sub-Riemanniana* é uma terna $(M, \mathcal{D}, g)$ onde M é uma variedade orientada, $\mathcal{D}$ é uma distribuição orientada sobre M (i.e. $\mathcal{D}$ é um sub-fibrado do fibrado tangente TM) e g é uma métrica definida positiva sobre $\mathcal{D}$. Quando $\mathcal{D}$ é uma distribuiçâo de codimensão 2, regular e geradora por colchetes, sobre uma variedade 4-dimensional M, dizemos que $\mathcal{D}$ é uma *distribuição de Engel*

Proposição 1. *Let $\mathcal{D}$ uma distribuição de Engel e $\mathcal{L}$ a forma de levi de $\mathcal{D}^2$, então $\mathcal{L}$ é uma forma bilinear anti-simétrica sobre $\mathcal{D}^2$, seu núcleo tem dimensão um e está contido em $\mathcal{D}$.*

Um *espaço sub-homogêneo*, é uma variedade sub-Riemanniana que admite um grupo transitivo de sub-isometrias agindo suavemente em M.

Teorema 1. *Seja $(M, \mathcal{D}, g)$ um espaço sub-homogêneo simplesmente conexo 4-dimensional e $\mathcal{D}$ uma distribuição de Engel. Então:*

1. *a componente conexa contendo a identidade do grupo de todas as isometrias sub-Riemannianas de M, denotado por G, é um grupo de Lie, simplesmente conexo, que age simplesmente e transitivamente sobre M;*
2. *a álgebra de Lie de G possui uma decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] + [[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}]$, onde $\mathfrak{p}$ corresponde à $\mathcal{D}_{x_0}$ através da identificação de $\mathfrak{g}$ com $T_{x_0}M$ para um ponto base escolhido x_0, e $\mathfrak{p}$ não depende da escolha de x_0;*
3. *o produto interno B induzido sobre $\mathfrak{p}$ pela identificação de $\mathfrak{p}$ com $\mathcal{D}_{x_0}$ não depende do ponto $x_0 \in M$ escolhido.*

Agradecimentos

A autora agradece à CAPES pelo apoio financeiro recebido durante a realização desta pesquisa (Processo BEX 6124/12-7).

Resultados

G	A'	$\{Y_1, Y_2\}$ é uma base o.n. de $\mathfrak{p}$	2Ω	μ_1	μ_2
E^4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = X_1'$ $Y_2 = X_2'$	0	0	0
$\widetilde{Euc_2^+} \times \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = \sqrt{b} X_1'$ $Y_2 = \frac{1}{b} X_4' - \frac{1}{\sqrt{b}} X_3'$	0	b	0
$Poinc_2^+ \times \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = \sqrt{b} X_1'$ $Y_2 = -\frac{1}{b} X_4' + \frac{1}{\sqrt{b}} X_3'$	0	$-b$	0
$\widetilde{U(1,1)}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + \frac{a}{2}) X_2' + X_4'$ $+ \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \frac{a}{2}) X_3'$ $Y_2 = \frac{c}{\sqrt{2}}(X_2' + X_3')$	0	a	c^2
$\widetilde{SO(2)} \bowtie H^3$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = -\frac{1}{b}(X_2' + c\sqrt{b} X_1')$ $Y_2 = -\sqrt{b} X_1'$	$-b$	a	0
$SO_e(1,1) \bowtie H^3$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = \frac{1}{b}(X_2' + c\sqrt{b} X_1')$ $Y_2 = -\sqrt{b} X_1'$	b	a	0
$\widetilde{U(2)}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = -c\sqrt{b} X_1' - \{\sqrt{b(ab + c^2)}/b\} X_2'$ $- \{c/b(ab + c^2)\} X_4'$ $Y_2 = \sqrt{b} X_1' + \{1/b(ab + c^2)\} X_4'$	$-b$	a	$-(ab + c^2)$
$\widetilde{U(1,1)}'$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = -c\sqrt{b} X_1' + \{\sqrt{b(ab + c^2)}/b\} X_2'$ $+ \{c/b(ab + c^2)\} X_4'$ $Y_2 = \sqrt{b} X_1' - \{1/b(ab + c^2)\} X_4'$	b	a	$-(ab + c^2)$
$\widetilde{U(1,1)}''$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = -c\sqrt{b} X_3' - \{\sqrt{b(ab + c^2)}/b\} X_2'$ $+ \{c/b(ab + c^2)\} X_4'$ $Y_2 = \sqrt{b} X_3' - \{1/b(ab + c^2)\} X_4'$	$-b$	a	$ab + c^2$
$\widetilde{U(1,1)}'''$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = -c\sqrt{b} X_1' + \{\sqrt{b(ab + c^2)}/b\} X_3'$ $- \{c/b(ab + c^2)\} X_4'$ $Y_2 = \sqrt{b} X_1' + \{1/b(ab + c^2)\} X_4'$	b	a	$ab + c^2$

Tabela 1: Espaços Sub-simétricos de tipo Engel: $\{X_1', X_2', X_3' = [X_1', X_2'], X_4'\}$ é uma base da álgebra de Lie de G, tal que X_4' é central; A' é a transposta da matriz de $ad_{X_3'}$ restrita a base $\{X_1', X_2', X_4'\}$; 2Ω, μ_1 e μ_2 são invariantes; a, b, c são parâmetros tais que $a \in I\!R$, $b > 0$, $c > 0$ e $(ab + c^2) > 0$.

$G = G' \bowtie I\!R$	B'	$\{Y_1, Y_2\}$	$\overline{\sigma}$	$\overline{\tau}$	$\overline{\alpha}$
$G' = I\!R^3$	$\begin{pmatrix} 0 & -y & -z & -w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = X_1'$ $Y_2 = X_2'$	w	$-\frac{1}{4} y^2$	0
$G' = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 & b \\ 0 & e^t & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t, b, c \in I\!R \right\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -m & -n \\ 0 & 0 & 0 & -sgn(r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = X_1'$ $Y_2 = \sqrt{\lvert r \rvert} X_2'$	n	0	r^2

Tabela 2: Espaços Sub-homogêneos de tipo Engel que não são Sub-simétricos: $\{X_1', X_2', X_3' = [X_1', X_2'], X_4' = [X_1', X_3']\}$ é uma base da álgebra de Lie de G; $[X_3', X_2'] = -sgn(r) X_3'$ para a última classe de exemplos na tabela e $[X_3', X_2'] = 0$ para a outra classe; $\{Y_1, Y_2\}$ é uma base o.n. de $\mathfrak{p}$; B' é a matriz transposta de $ad_{X_4'}$ na base $\{X_1', X_2', X_3', X_4'\}$; $\overline{\sigma}$, $\overline{\tau}$ e $\overline{\alpha}$ são invariantes; y, z, w, m, n, r, são parâmetros reais tais que $r \neq 0$ e $(y^2 + w^2) \neq 0$.

Referências

[1] Almeida, D. M.: *Sub-Riemannian Homogeneous Spaces of Engel Type*, J. Dyn. Control Syst. 20, 149-166 (2014).

[2] Almeida, D. M.: *Sub-Riemannian symmetric spaces of Engel type*, Matemática Contemporânea 17, 45-58 (1998).