Estrutura de espaços de Banach combinatórios

Christina Brech

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

brech@ime.usp.br

IME-USP

Resumo

Um espaço combinatório é um espaço de Banach $X_{\mathcal{F}}$ definido como o completamento de uma norma no espaço vetorial $c_{00}(\mathbb{N})$, induzida por uma família compacta $\mathcal{F}$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ com certas propriedades. Nesse trabalho, apresentamos alguns resultados que relacionam as propriedades combinatórias da família $\mathcal{F}$ e as propriedades estruturais do espaço de Banach correspondente $X_{\mathcal{F}}$.

Introdução

Considere uma família $\mathcal{F}$ formada por subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ com as seguintes propriedades:

- $[\mathbb{N}]^{\leq 1} := \{F \subseteq \mathbb{N} : |F| \leq 1\} \subseteq \mathcal{F}$;
- $\mathcal{F}$ é hereditária, ou seja, se $F \in \mathcal{F}$ e $G \subseteq F$, então $G \in \mathcal{F}$;
- $\mathcal{F}$ é compacta como subconjunto de $2^{\mathbb{N}}$, quando identificamos cada elemento de $\mathcal{F}$ com sua função característica.

Podemos então definir uma norma no espaço vetorial

$$c_{00}(\mathbb{N}) := \{x = (\xi_n)_n \subseteq \mathbb{R} : |\{n \in \mathbb{N} : \xi_n \neq 0\}| < \infty\}$$

das sequências de números reais que são eventualmente nulas, da seguinte forma:

$$\|x\|_{\mathcal{F}} = \sup \left\{ \sum_{n \in F} |\xi_n| : F \in \mathcal{F} \right\}.$$

Consideremos $X_{\mathcal{F}}$ o completamento do espaço $(c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$.

Exemplos

O exemplo mais simples de um espaço combinatório é o espaço c_0, das sequências de números reais convergentes a 0, munido da norma do supremo. Tomando $\mathcal{F} = [\mathbb{N}]^{\leq 1}$, temos uma família hereditária e compacta cujo espaço combinatório correspondente é o c_0.

Um segundo exemplo, mais interessante, é o espaço conhecido como espaço de Schreier. Considere a família de Schreier

$$\mathcal{S} = \{F \subseteq \mathbb{N} : |F| \leq \min F\},$$

que também satisfaz as três condições: contém os conjuntos unitários, é hereditária e é compacta. O espaço de Schreier é o espaço combinatório $X_{\mathcal{S}}$ correspondente a essa família.

Propriedades básicas

Dado um espaço combinatório $X_{\mathcal{F}}$, considere a sequência de vetores $(e_n)_n$, onde cada $e_n = (\delta_{in})_i$ é a sequência que possui 0 em todas as coordenadas, exceto a n-ésima coordenada, que é 1. Esta sequência forma uma base algébrica do espaço vetorial $c_{00}(\mathbb{N})$ e pode-se provar que forma uma base de Schauder do espaço combinatório $X_{\mathcal{F}}$.

Entretanto, observemos que o comportamento das famílias usadas nos dois exemplos acima têm comportamentos drasticamente distintos: a família dos conjuntos unitários $[\mathbb{N}]^{\leq 1}$ se "distribui" uniformemente ao longo do conjuntos dos números naturais, enquanto a família $\mathcal{S}$ tem apenas conjuntos pequenos no "início" de $\mathbb{N}$ e conjuntos maiores na medida em que se avança.

Espera-se que isso resulte em características distintas dos dois espaços combinatórios correspondentes. Veremos no que segue que isso, de fato, ocorre.

Resultados

Resultados clássicos garantem que se $T : c_0 \to c_0$ é uma isometria - um operador linear, bijetor e que preserva a norma - então existe uma permutação $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $Te_n = \pm e_{\pi(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para provar uma generalização deste resultado precisamos da noção seguinte: uma família $\mathcal{F}$ é dita *spreading* se para todo $F = \{m_1, \ldots, m_l\} \in \mathcal{F}$ e $n_i \geq m_i$, então $\{n_1, \ldots, n_l\} \in \mathcal{F}$.

Teorema 1 (C. Brech, V. Ferenczi, A. Tcaciuc, 2019)**.** *Se $\mathcal{F}$ é uma família hereditária, compacta,* spreading *que contém os conjuntos unitários, então para toda isometria $T : X_{\mathcal{F}} \to X_{\mathcal{F}}$, existe uma permutação $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $Te_n = \pm e_{\pi(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Para provar esse resultado em [2], consideramos o operador adjunto $T^* : X_{\mathcal{F}}^* \to X_{\mathcal{F}}^*$ que também é uma isometria, quando T é uma isometria. Como toda isometria de espaços de Banach preserva os pontos extremos da bola unitária, utilizamos a seguinte caracterização de tais pontos:

$$Ext(B_{X_{\mathcal{F}}^*}) = \left\{ \sum_{n \in F} \pm e_n^* : F \text{ é um elemento maximal de } \mathcal{F} \right\}.$$

Provamos então que se T é uma isometria, então $T^* e_k^* = \sum_{n \in F_k} \pm e_n^*$ para algum $F_k \in \mathcal{F}$ e, finalmente, que a família dos suportes $(F_k)_k$ é disjunta.

No caso específico da família de Schreier e suas generalizações de ordem $\alpha < \omega_1$, provamos um resultado mais forte, a saber:

Teorema 2 (C. Brech, V. Ferenczi, A. Tcaciuc, 2019)**.** *Se $\mathcal{S}_\alpha$ é uma família de Schreier de ordem $\alpha < \omega_1$, então toda isometria $T : X_{\mathcal{S}_\alpha} \to X_{\mathcal{S}_\alpha}$ é da forma $Te_n = \pm e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Nossos resultados generalizam um resultado de [1] para famílias de Schreier de ordem finita.

Observações finais

No lugar de se considerar famílias hereditárias, compactas que contêm todos os conjuntos unitários de $\mathbb{N}$, pode-se considerar família hereditárias, compactas que contêm todos os conjuntos unitários de outros conjuntos de índices I, em particular de famílias de subconjuntos finitos de cardinais não-enumeráveis κ, dando origem a espaços combinatórios não-separáveis. Em particular, as famílias de Schreier foram generalizadas para esses contexto de diferentes maneiras, veja [3] e [4]. Assim, uma pergunta natural é a seguinte: para quais espaços combinatórios não-separáveis podemos provar uma versão dos nossos teoremas?

Um problema que se apresenta imediatamente é o fato que a noção de *spreading* não faz sentido nesse contexto, já que a generalização natural do que seria uma família *spreading* num cardinal maior impede que uma família seja ao mesmo tempo *spreading* e compacta.

Referências

[1] L. Antunes, K. Beanland, and H. Viet Chu. On the geometry of higher order Schreier spaces. *preprint*, 2019.

[2] C. Brech, V. Ferenczi, and A. Tcaciuc. Isometries of combinatorial spaces. *preprint*, 2019.

[3] C. Brech, J. Lopez-Abad, and S. Todorcevic. Homogeneous families on trees and subsymmetric basic sequences. *Adv. Math.*, 334:322–388, 2018.

[4] J. Lopez-Abad and S. Todorcevic. Positional graphs and conditional structure of weakly null sequences. *Adv. Math.*, 242:163–186, 2013.

Agradecimentos

A pesquisadora recebeu apoio da Fapesp.