Localização de Módulos de Verma φ-Imaginários sobre a Álgebra de Lie Afim $\widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$

Marcela Guerrini Alves orientador: Vyacheslav Futorny

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

guerrini@ime.usp.br

IME-USP

Resumo

Neste trabalho estudamos uma realização dos módulos de Verma φ-imaginário sobre álgebra de Lie afim $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$. Em seguida, com o auxílio dessa realização, e aplicando os funtores localização de Ore e localização torcida, obtemos novas famílias de representações irredutíveis de $\mathfrak{g}$.

Introdução

Em [1], para uma álgebra de Lie afim qualquer, associa-se a uma função $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \{\pm\}$ um módulo de Verma φ-imaginário. Além disso, é fornecido um critério de irredutibilidade, o que permite a construção de novas famílias de módulos irredutíveis. Realizações de campos livres desses módulos foram apresentadas em [5], ocasião em que foi introduzida a linguagem dos módulos de Verma $\mathbb{J}$-imaginários, que são os mesmos módulos exibidos de uma outra forma. Para o nosso caso particular de $\mathfrak{g}$, seja $\mathbb{J} \subset \mathbb{N}^*$, a representação é então dada no espaço $\mathbb{C}[\mathrm{x},\mathrm{y}]$, em que $\mathrm{x} := \{x_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ e $\mathrm{y} := \{y_n \mid n \in \mathbb{J}\} \cup \{y_{-n} \mid n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J}\}$. Inspirados pelo que foi feito em [3], temos o seguinte resultado.

Teorema

A partir de agora fixamos $i \in \mathbb{Z}$ e consideramos um conjunto finito $S = \{k_1, \ldots, k_n\} \subseteq \mathbb{J} \cup \{-l \mid l \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J}\}$ ($S = \emptyset$ é admitido).

- Se $K \neq 0$, temos os espaços vetoriais

$$M_S \simeq y_{k_1}^{-1} \ldots y_{k_n}^{-1} \mathbb{C}[\mathrm{x}, \mathrm{y}_S^{-1}, \hat{\mathrm{y}}_S],$$
$$M_{i,S} \simeq x_i^{-1} y_{k_1}^{-1} \ldots y_{k_n}^{-1} \mathbb{C}[x_i^{-1}, \mathrm{y}_S^{-1}, \hat{\mathrm{x}}_i, \hat{\mathrm{y}}_S].$$

- Se $K = 0$ temos

$$M_i \simeq x_i^{-1} \mathbb{C}[x_i^{-1}, \hat{\mathrm{x}}_i].$$

Teorema 1. *Seja $\mathbb{J} \subset \mathbb{N}^*$ tal que $\mathbb{J}$ é finito ou $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J}$ é finito.*

(i) Seja $K \neq 0$. Então M_S é irredutível, enquanto $M_{i,S}$ é irredutível se e somente se $2J - iK \notin \mathbb{Z}$.

(ii) Seja $K = 0$. Então M_i é irredutível se e somente se $2J \notin \mathbb{Z}$.

Demonstração

Principais etapas da demonstração:

- $2J - iK \in \mathbb{Z}$

Neste caso, mostra-se que $M_{i,S}$ e M_i possuem submódulos próprios, concluindo então que se $M_{i,S}$ ($K \neq 0$) é irredutível, $2J - iK$ não pode ser um número inteiro e se M_i ($K = 0$) é irredutível, $2J$ não pode ser um número inteiro.

- $K \neq 0$

Em primeiro lugar, mostra-se que quando $K = 0$, tanto M_S como $M_{i,S}$ são redutíveis.

Em seguida, analisamos o que ocorre com M_S se $K \neq 0$; e para $K \neq 0$ e $2J - iK \notin \mathbb{Z}$, o que ocorre com $M_{i,S}$.

A proposição seguinte fornece o item (i).

Proposição 1. *Seja $K \neq 0$. Temos então o seguinte:*

(a) $U(y_{k_1}^{-1} \ldots y_{k_n}^{-1}) = M_S$.

(b) Seja $v \in M_S$ não nulo. Então existe $u \in U$ tal que $u(v) = y_{k_1}^{-1} \ldots y_{k_n}^{-1}$.

Seja $2J - iK \notin \mathbb{Z}$. Então

(a) $U(x_i^{-1} y_{k_1}^{-1} \ldots y_{k_n}^{-1}) = M_{i,S}$.

(b) Seja $v \in M_{i,S}$ não nulo. Então existe $u \in U$ tal que $u(v) = x_i^{-1} y_{k_1}^{-1} \ldots y_{k_n}^{-1}$.

- $K = 0$

Já temos que se $2J \in \mathbb{Z}$, então M_i é redutível. Precisamos avaliar o que ocorre quando $2J \notin \mathbb{Z}$.

A próxima proposição fornece o item (ii).

Proposição 2. *Seja $K = 0$ e $2J \notin \mathbb{Z}$. Temos então o seguinte:*

(a) $U(x_i^{-1}) = M_i$.

(b) Seja $v \in M_i$ não nulo. Então existe $u \in U$ tal que $u(v) = x_i^{-1}$.

Em Progresso

No momento, ainda inspirados por [3], trabalhamos para verificar se os seguintes resultados são válidos para módulos de Verma $\mathbb{J}$-imaginários:

Teorema 2. *Sejam $i \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$, e $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\lambda(c) = K \neq 0$ e $\lambda(h_0) = 2J$.*

(i) Seja $z \in \mathbb{Z}$. Então $\mathcal{D}_i^z M_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda) \simeq \mathcal{D}_i M_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)$ e $\mathcal{D}_i M_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)/M_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)$ é irredutível se e somente se $2J - iK \notin \mathbb{Z}$. No último caso, $\mathcal{D}_i M_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)/M_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)$ é um módulo denso em $\mathcal{W}(\alpha + i\delta)$ cujos pesos possuem multiplicidade infinita.

(ii) Seja $z \notin \mathbb{Z}$. Então $\mathcal{D}_i^z M_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)$ é irredutível se e somente se $z - 2J + iK \notin \mathbb{Z}$. No último caso, $\mathcal{D}_i^z M_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)$ é um módulo denso livre de torção cujos pesos possuem multiplicidade infinita.

(iii) $\mathcal{D}_{i_1}^{z_1} M_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda) \simeq \mathcal{D}_{i_2}^{z_2} M_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)$ se e somente se $z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}$ e $i_1 = i_2$.

Teorema 3. *Sejam $i \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$, e $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\lambda(c) = 0$ e $\lambda(h_0) = 2J$.*

(i) Seja $z \in \mathbb{Z}$. Então $\mathcal{D}_i^z M'(\lambda) \simeq \mathcal{D}_i M'(\lambda)$ e $\mathcal{D}_i M'(\lambda)/M'(\lambda)$ é irredutível se e somente se $2J \notin \mathbb{Z}$. No último caso, $\mathcal{D}_i M'(\lambda)/M'(\lambda)$ é um módulo denso em $\mathcal{W}(\alpha + i\delta)$ cujos pesos possuem multiplicidade infinita.

(ii) Seja $z \notin \mathbb{Z}$. Então $\mathcal{D}_i^z M'(\lambda)$ é irredutível se e somente se $z - 2J \notin \mathbb{Z}$. No último caso, $\mathcal{D}_i^z M'(\lambda)$ é um módulo denso livre de torção cujos pesos possuem multiplicidade infinita.

(iii) $\mathcal{D}_{i_1}^{z_1} M'(\lambda) \simeq \mathcal{D}_{i_2}^{z_2} M'(\lambda)$ se e somente se $z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}$ e $i_1 = i_2$, em que $M'(\lambda) = M_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)/\mathfrak{M}$, e $\mathfrak{M}$ é um submódulo próprio de $M_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)$, tendo em vista que quando $\lambda(c) = 0$ $M_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)$ é redutível.

Referências

[1] V.Bekkert, G.Benkart, V.Futorny, I.Kashuba - *New Irreducible Modules for Heisenberg and Affine Lie Algebras*, Journal of Algebra, vol. 373, pp.284-298, 2013.

[2] V.M.Futorny - *On Imaginary Verma Modules over the Affine Lie Algebra $A_1^{(1)}$*, Oslo University, Preprint Series, vol. 9, 1991.

[3] V.Futorny, D.Grantcharov, R.A.Martins - *Localization of Free Field Realizations of Affine Lie Algebras*, Letters in Mathematical Physics, vol. 105, pp.483-502, 2015.

[4] V.G.Kac - *Infinite Dimensional Lie Algebras*, Cambridge University Press, 3° edição, 1990.

[5] R.A.Martins - *Free Fields Realizations of Certain Modules for Affine Lie Algebra $\widehat{\mathfrak{sl}}(n,\mathbb{C})$*, Algebra and Discrete Mathematics, vol.12, pp.28-52, 2011.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 no período de 01/08/2016 a 01/02/2019. A partir de 01/03/2019 está sendo realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil (141389/2019-2).