Uma sequência exata relacionada a uma extensão de anéis e uma representação parcial

Itailma Rocha & Mikhailo Dokuchaev

Universidade Federal de Campina Grande

itailma@mat.ufcg.edu.br

Introdução

Para uma extensão de galois de anéis comutativos com unidade, Chase, Harison e Rosemberg construíram em [1], uma sequência exata envolvendo o grupo de Picard, grupo de Brauer relativo e grupos de cohomologias. A sequência de Chase-Harison-Rosemberg foi generalizada para o contexto de anéis no comutativos por Miyashita em 1973, e para anéis não unitários, apenas com um conjunto de unidades locais, por El Kaoutit e Gómes-Torrecillas em 2012. Em 2018, Dokuchaev, Paques e Pinedo, generalizao a sequência trabalhando em um contexto de ações parciais.

Objetivos

Generalizar as sequência de Miyashita para o contexto de ações parciais e e a seqência de Dokuchaev-Paques-Pinedo, para uma extensão de anéis não comutativos com unidade.

Resultados

Seja $R \subseteq S$ uma extensão de anéis com mesma unidade. Vamos denotar por $\mathcal{Z}$ o centro do anel R. Considere $\mathrm{PicS}(R)$ o semigrupo dos R-bimódulos parcialmente inversíveis e

$$\begin{aligned} \Theta : G &\longrightarrow \mathrm{PicS}(R) \\ x &\longmapsto \quad [\Theta_x] \end{aligned}$$

uma representação parcial com $\Theta_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \simeq R1_x$, onde 1_x um idempotente central de R.

A representação parcial Θ induz uma ação parcial $\alpha = (\alpha_x, D_x)$ sobre $\mathcal{Z}$ e assim podemos construir os grupos de cohomologias parcial com relação a ação parcial α:

$$H^1_\Theta(G,\alpha,\mathcal{Z}), H^2_\Theta(G,\alpha,\mathcal{Z}), H^3_\Theta(G,\alpha,\mathcal{Z}).$$

A representação parcial Θ também induz uma ação parcial α^* sobre $\mathrm{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)$ cujos invariantes so dados por:

$$\mathrm{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*} = \{[P]; \Theta_x \otimes P \simeq P \otimes \Theta_x,\ \forall\, x \in G\}.$$

Para uma representação parcial Θ existe uma família de isomorfismos de R-bimódulos

$$f^\Theta = \{f^\Theta_{x,y} : \Theta_x \otimes \Theta_y \longrightarrow 1_x\Theta_{xy},\ x, y \in G\}.$$

Se f^Θ satisfaz o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \Theta_x \otimes \Theta_y \otimes \Theta_z \arrow[r, "\Theta_x \otimes f^\Theta_{y,z}"] \arrow[d, "f^\Theta_{x,y} \otimes \Theta_z"'] & \Theta_x \otimes 1_y\Theta_{yz} = 1_{xy}\Theta_x \otimes \Theta_{yz} \arrow[d, "f^\Theta_{x,yz}"] \\ 1_x\Theta_{xy} \otimes_R \Theta_z \arrow[r, "f^\Theta_{xy,z}"'] & 1_x 1_{xy}\Theta_{xyz} \end{tikzcd}$$

então $\Delta(\Theta) = \bigoplus_{x\in G} \Theta_x$ tem uma estrutura de anel associativo com unidade, chamado de **produto cruzado generalizado parcial**. Identificando R com Θ_1, podemos ver R como um subanel de $\Delta(\Theta)$. Assim, temos uma extensão de anéis $R \subseteq \Delta(\Theta)$ com mesma unidade.

Seja $\Delta(\Theta)$ um produto cruzado generalizado parcial induzido. Definimos o grupo abeliano

$$\mathcal{C}(\Theta/R) = \{[\Delta(\Gamma)];\ \Gamma_x | \Theta_x \text{ e } \Gamma_x \otimes \Gamma_{x^{-1}} \simeq R1_x\}.$$

com produto dado por

$$[\Delta(\Gamma)][\Delta(\Omega)] = \left[\bigoplus_{x\in G} \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x\right].$$

Seja o subgrupo de $\mathrm{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)$ definido por

$$\mathrm{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)} = \{[P] \in \mathrm{Pic}_{\mathcal{Z}}(R); P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} | \Theta_x,\ \forall\, x \in G\}.$$

Dado $[P] \in \mathrm{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$, então $x \mapsto [\Omega^P_x] = [P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1}]$ define uma representação parcial, onde $\Delta(\Omega^P) = \bigoplus_{x\in G} \Omega^P_x$ é um produto cruzado generalizado parcial e $[\Delta(\Omega^P)] \in \mathcal{C}(\Theta/R)$. Temos um morfismo de grupos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathrm{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)} &\longrightarrow \mathcal{C}(\Theta/R) \\ [P] \quad &\longmapsto [\Delta(\Omega^P)]. \end{aligned}$$

Definimos o grupo de Brauer generalizado como sendo o quociente:

$$\mathcal{B}(\Theta/R) = \frac{\mathcal{C}(\Theta/R)}{Im(\mathcal{L})}.$$

Considerando

$$\mathrm{PicS}_0(R) = \{[P] \in \mathrm{PicS}(R);\ P|R\}.$$

Temos um morfismo de grupos

$$\begin{aligned} \zeta : \mathcal{C}(\Theta/R) &\longrightarrow Z^1(G, \alpha^*, \mathrm{PicS}_0(R)) \\ [\Delta(\Gamma)] &\longmapsto (x \longmapsto [\Gamma_x][\Theta_{x^{-1}}]) \end{aligned}$$

Definimos $\overline{H}^1(G,\alpha^*,\mathrm{PicS}_0(R))$ pelo quociente

$$\overline{H}^1(G,\alpha^*,\mathrm{PicS}_0(R)) = \frac{Z^1(G,\alpha^*,\mathrm{PicS}_0(R))}{Im(\zeta\circ\mathcal{L})}.$$

Teorema: A sequência

$$H^1_\Theta(G,\alpha,\mathcal{Z}) \to \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(\Delta(\Theta/R))^{(G)} \to \mathrm{Pic}_{\mathcal{Z}}(R) \cap \mathrm{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*}$$

$$\to H^2_\Theta(G,\alpha,\mathcal{Z}) \longrightarrow \mathcal{B}(\Theta/R) \longrightarrow \overline{H}^1(G,\alpha^*,\mathrm{PicS}_0(R))$$

$$\to H^3_\Theta(G,\alpha,\mathcal{Z})$$

é exata.

Observaçã: Sejam R uma anel comutativo, $\alpha = (D_x, \alpha_x)$ uma ação parcial e $R^\alpha \subset R$ uma extensão de Galois α-parcial. Considerando

$$\begin{aligned} \Theta_0 : G &\longrightarrow \mathrm{PicS}(R) \\ x &\longmapsto [(D_x)_{x^{-1}}] \end{aligned}$$

onde $(D_x)_{x^{-1}}$ um R-bimódulo D_x com ações definidas por:

$$r * d = rd \ \text{ e } \ d * r = d\alpha_x(r1_{x^{-1}}),$$

então a sequência do Teorema anterior se reduz a sequência definida por Dokuchaev-Paques-Pinedo em [2].

Referências

[1] Stephen Urban Chase, David K Harrison, and Alex Rosenberg. *Galois theory and cohomology of commutative rings*, volume 52. American Mathematical Soc., 1969.

[2] M Dokuchaev, A Paques, and H Pinedo. Partial galois cohomology and related homomorphisms. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 2019.

[3] Laiachi El Kaoutit and José Gómez-Torrecillas. Invertible unital bimodules over rings with local units, and related exact sequences of groups, ii. *Journal of Algebra*, 370:266–296, 2012.

[4] Teruo Kanzaki. On generalized crossed product and brauer group. *Osaka Journal of Mathematics*, 5(2):175–188, 1968.

[5] Yôichi Miyashita. An exact sequence associated with a generalized crossed product. *Nagoya Mathematical Journal*, 49:21–51, 1973.

Agradecimentos

Agradeço a Unidade Acadêmica de Matemática/CCT/UFCG pelo apoio.