Redução de Singularidades de Curvas Analíticas em $\mathbb{C}^2$

Francieli Triches[1] **& Marianna Ravara Vago**[2]

Universidade Federal de Santa Catarina

frantriches@gmail.com[1] & marianna.v@ufsc.br[2]

Resumo

Neste trabalho estudamos os germes de curvas analíticas singulares na origem de $\mathbb{C}^2$, e transformações chamadas *blow-ups* (ou *explosões*), que modificam o espaço ambiente e simplificam a curva. Mostramos que é possível dessingularizar uma curva com um número finito de blow-ups.

Blow-up

O blow-up $\pi : \widetilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}$ da origem de $\mathbb{C}^2$ é um morfismo entre variedades complexas representado em cartas locais. A variedade $\widetilde{\mathbb{C}}^2$ é dada por duas cópias de $\mathbb{C}^2$, com coordenadas (x, y_1) e (x_1, y), que se colam no conjunto $\mathbb{C}^2 \setminus \{y_1 = 0\} \cap \mathbb{C}^2 \setminus \{x_1 = 0\}$ através da mudança de coordenadas

$$y_1 = \frac{1}{x_1}\,.$$

Definimos, nestas cartas, $\pi(x, y_1) = (x, xy_1)$ e $\pi(x_1, y) = (x_1 y, y)$. Desta forma, π está bem definido e o *divisor excepcional* $\pi^{-1}(0)$ é a reta projetiva complexa $\mathbb{P}^1$.

Germes de curva

Um *germe de curva analítica irredutível* C na origem de $\mathbb{C}^2$ é o conjunto dado pelos zeros de um polinômio: $C = \{f(x, y) = 0\}$. Ao fazermos o blow-up da origem, modificamos também a curva C. Assim

$$\pi^{-1}(C) = \pi^{-1}(0) \cup C_1\,.$$

Chamamos C_1 de *transformado estrito* de C por π.

Teorema

Após um número finito de blow-ups, o transformado estrito final de uma curva analítica é uma curva analítica não singular transversal ao divisor excepcional.

Exemplo

Considere a curva $C = \{f(x, y) = y^2 - x^3\}$.

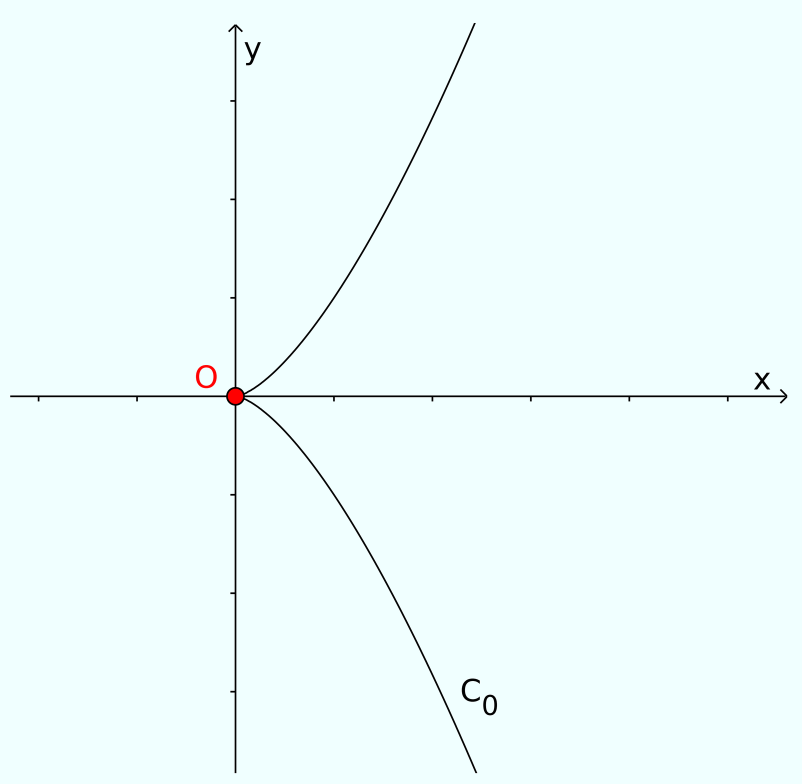

Figura 1: Curva C_0

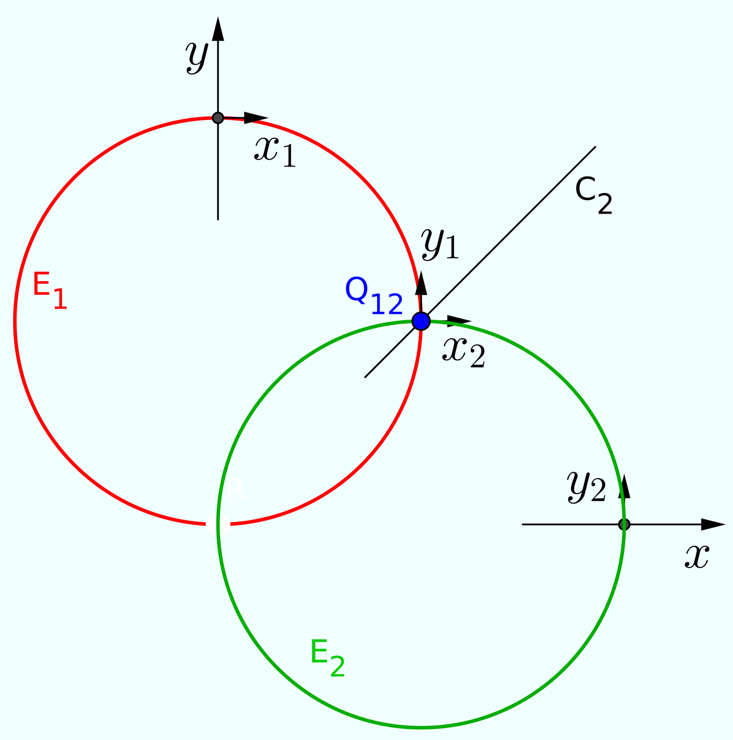

Figura 3: $C_2 = \{y_2 - x_2 = 0\}$

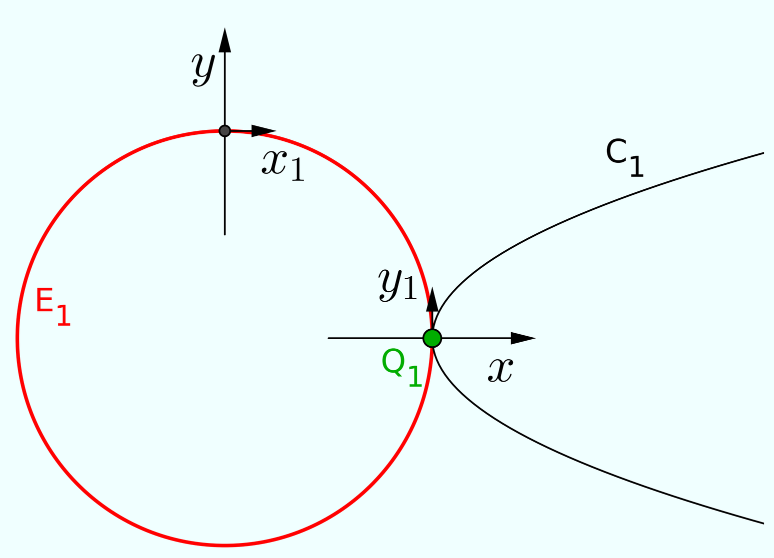

Figura 2: $C_1 = \{y_1^2 - x_1 = 0\}$

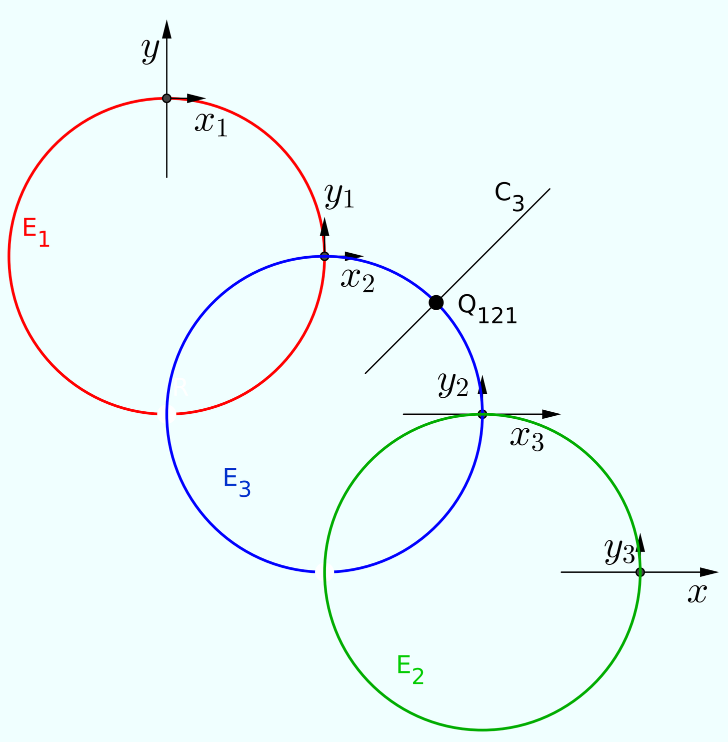

Figura 4: $C_3 = \{y_3 - 1 = 0\}$

Multiplicidades

Seja $C = \{f(x, y) = 0\}$ e escreva

$$f(x, y) = f_\eta(x, y) + f_{\eta+1}(x, y) + f_{\eta+2}(x, y) + \cdots + f_n(x, y)$$

onde cada $f_i(x, y)$ é um polinômio homogêneo de grau i.

As coordenadas x, y são ditas *transversais* se x não divide $f_\eta(x, y)$. Neste caso, podemos escrever $f_\eta(x, y) = y^\eta + \cdots$.

Definição 1. A *multiplicidade intrínseca*, ou *ordem* de C na origem é o número inteiro positivo $\eta = m(f(x, y); 0)$. Dizemos que a origem é *não singular* se $\eta = 1$. Se $\eta \geq 2$, dizemos que a origem é *singular*.

Definição 2. O *cone tangente* de C é o conjunto

$$CT(C) = \{f_\eta(x, y) = y = 0\}\,.$$

Definição 3. A *multiplicidade de interseção* de C com seu cone tangente é a ordem de $f(x, 0)$ na origem: $I = m(f(x, 0); 0)$.

Definição 4. O *expoente de contato* de C é o número $\delta = \dfrac{I}{\eta}$.

Polígono de Newton

O *Polígono de Newton* de C é o fecho convexo em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ do conjunto

$$\mathcal{N}(f; x, y) = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x^m y^n \text{ aparece em } f(x, y)\}\,.$$

O *primeiro lado* do Polígono de Newton é o lado de maior coeficiente angular em módulo. O primeiro lado corta a ordenada no ponto $(0, \eta)$ (que é um vértice do polígono) e a abscissa no ponto $(\delta\eta, 0)$. Note que a inclinação do primeiro lado é $\frac{-1}{\delta}$.

Exemplo

Considere a curva $C = \{f(x, y) = y^2 - x^3\}$.

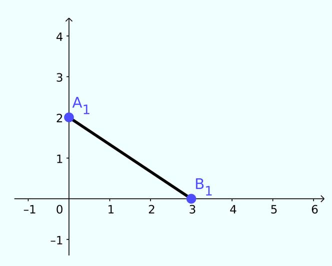

Figura 5: Polígono de Newton de C_0

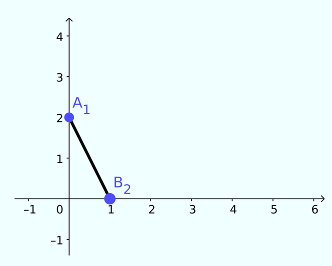

Figura 6: Polígono de Newton de C_1

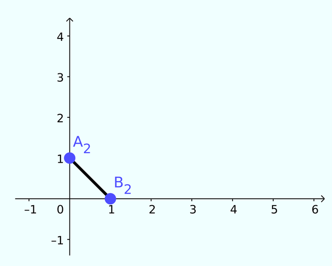

Figura 7: Polígono de Newton de C_2

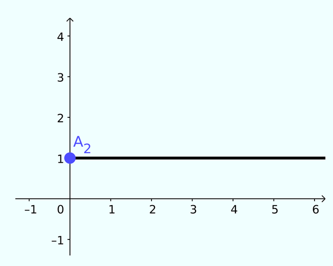

Figura 8: Polígono de Newton de C_3

Proposição 1. Após blow up, temos duas possibilidades:

1. a multiplicidade intrínseca η baixa;
2. se não temos (1), então o expoente de contato δ baixa uma unidade.

Demonstração do Teorema

Dem: Observe que, a multiplicidade intrínseca η da curva C é um número inteiro positivo e o expoente de contato δ é um número positivo. Se a multiplicidade intrínseca da curva se mantém após blow-up, o expoente de contato baixa uma unidade. Como isto só pode ocorrer um número finito de vezes, em algum momento a multiplicidade deve baixar. Por indução, após um número finito de blow-ups encontramos que o transformado estrito C' tem multiplicidade intrínseca igual a $\mathbf{1}$.

Referências

[1] B. Teissier. *Complex Curve Singularities: A Biased Introduction*. Singularities in Geometry and Topology, v. 825, p.887-950, jan. 2007.

[2] F. C. Torres. *Introducción a la Geometría Analítica Local*. [S.I.]: Pontificia Universidad Católica del Perú, 2011.

Agradecimentos: Este trabalho contou com o apoio da CAPES.