Módulos, funtores e o teorema de Watts

Amanda Cristina Foetsch[1]
Orientadora: Profa. Tanise Carnieri Pierin[2]

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Resumo

Considere A e B duas k-álgebras associativas, com unidade e de dimensão finita sobre o corpo k. Para um $B-A$-bimódulo M, está definido o funtor $\text{Hom}_A(M,\_) : \text{Mod } A \to \text{Mod } B$, que tem papel fundamental no estudo da categoria de módulos definidos sobre uma k-álgebra. Neste trabalho, mostraremos o Teorema de Watts, que garante que todo funtor covariante k-linear entre Mod A e Mod B que preserva produtos diretos e é exato à esquerda é, a menos de um isomorfismo entre funtores, o funtor Hom. Apresentaremos também uma caracterização completa para os funtores covariantes k-lineares que preservam somas diretas e são exatos à direita. Nessas condições, verificaremos que o funtor é, a menos de isomorfismo, da forma $\_ \otimes_A N$, para algum $A-B$-bimódulo N.

Objetivos

1. Para um A-módulo à direita M, definir o funtor $\text{Hom}_A(M,\_)$ e, para um A-módulo à esquerda N, o funtor $\_ \otimes_A N$.
2. Introduzir o conceito de par adjunto
3. Enunciar o Teorema de Watts

O Funtor $\text{Hom}_A(M,\_)$

Sejam k um corpo e $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias k-lineares. Dizemos que $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor k-linear covariante se associa cada objeto X em $\mathcal{C}$ a um objeto $F(X)$ em $\mathcal{D}$, e cada morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ a um morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ em $\mathcal{D}$, de forma que:

- $F(1_X) = 1_{F(X)}$, para todo objeto X em $\mathcal{C}$,
- para todo par de morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ em $\mathcal{C}$, a igualdade $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ é obtida, e
- $F(f\alpha + g\beta) = F(f)\alpha + F(g)\beta$, para todos os morfismos $f, g : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ e todos $\alpha, \beta \in k$.

Considere A uma k-álgebra (associativa, com unidade e de dimensão finita) e M um A-módulo à direita. O funtor $\text{Hom}_A(M,\_) : \text{Mod } A \to \text{Mod } k$, em que Mod A e Mod k denotam, respectivamente, as categorias de módulos sobre A e módulos sobre k, é definido por:

- para cada A-módulo N, $\text{Hom}_A(M,N)$ é o conjunto dos morfismos de A-módulos de M para N, e
- para cada $f : X \to Y$ em Mod A, $\text{Hom}_A(M,f) : \text{Hom}_A(M,X) \to \text{Hom}_A(M,Y)$ é dado por $\text{Hom}_A(M,f)(g) = f \circ g$.

Dada uma k-álgebra B (associativa, com unidade e de dimensão finita), é possível garantir que se M é um $B-A$-bimódulo, então, para cada A-módulo N, o k-módulo $\text{Hom}_A(M,N)$ tem estrutura de B-módulo à direita; também, $\text{Hom}_A(M,f)$ é um morfismo de B-módulos à direita, para cada morfismo $f : X \to Y$ em Mod A. Dessa forma, $\text{Hom}_A(M,\_)$ é, neste caso, um funtor de Mod A para Mod B.

Pode-se verificar que $\text{Hom}_A(M,\_)$ preserva produtos diretos de famílias de A-módulos, isto é, se $(N_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ é uma família de A-módulos, então existe um isomorfismo de k-módulos

$$\text{Hom}_A\left(M, \prod_{\sigma\in\Sigma} N_\sigma\right) \simeq \prod_{\sigma\in\Sigma} \text{Hom}_A(M, N_\sigma).$$

É ainda possível mostrar que $\text{Hom}_A(M,\_)$ é exato à esquerda, isto é, se $0 \to X \to Y \to Z$ é uma sequência exata em Mod A, então a sequência $0 \to \text{Hom}_A(M,X) \to \text{Hom}_A(M,Y) \to \text{Hom}_A(M,Z)$ é exata.

Produto Tensorial de Módulos e o Funtor Tensor

Fixados um A-módulo à direita L, um A-módulo à esquerda M e um k-módulo X, dizemos que $g : L \times M \to X$ é uma aplicação A-bilinear se é A-linear em cada uma das coordenadas e $g(xa,y) = g(x,ay)$, para cada $x \in L$, $y \in M$ e $a \in A$.

Nas condições acima, o produto tensorial entre L e M, denotado por $L \otimes_A M$, é o par (T,t), em que T é um k-módulo e $t : L \times M \to T$ é uma aplicação A-bilinear, tal que para todo outro par (X,g), com X um k-módulo e $g : L \times M \to X$, existe uma única aplicação k-linear $\bar{g} : T \to X$ que satisfaz $\bar{g} \circ t = g$.

É possível mostrar que $L \otimes_A M$ existe e é único a menos de isomorfismos. Seus elementos são gerados por $t(x,y) = x \otimes y$, com $x \in L$ e $y \in M$, ou seja, são da forma $\Sigma_{\lambda\in\Lambda}(x_\lambda \otimes y_\lambda)\alpha_\lambda$, em que $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família de elementos de k de suporte finito.

Sejam $f : L \to L'$ e $g : M \to M'$ morfismos de A-módulos à direita e à esquerda, respectivamente. Defina $f \times g : L \times M \to L' \times M'$ por $(f \times g)(x,y) = (f(x), g(y))$, em que $x \in L$ e $y \in M$. Se $t' : L' \times M' \to L' \otimes_A M'$ é a aplicação canônica advinda da definição de produto tensorial, então a composta $t' \circ (f \times g)$ é uma aplicação A-bilinear. Segue da definição de produto tensorial que existe um único morfismo k-linear entre $L \otimes_A M$ e $L' \otimes_A M'$, denotado por $f \otimes g$, como abaixo

$$\begin{array}{ccc} L \times M & \xrightarrow{t} & L \otimes_A M \\ \downarrow{\scriptstyle f\times g} & & \downarrow{\scriptstyle f\otimes g} \\ L' \times M' & \xrightarrow{t'} & L' \otimes_A M' \end{array}$$

Usaremos tal morfismo para definir o funtor tensor $\_ \otimes_A M : \text{Mod } A \to \text{Mod } B$, em que M é um $A-B$-bimódulo e A e B são k-álgebras (associativas, com unidade e de dimensão finita): dado N um A-módulo à direita, defina $\_ \otimes_A M(N) = N \otimes_A M$, que tem estrutura de B-módulo à direita. Agora, dado um morfismo $f : X \to Y$ em Mod A, defina $\_ \otimes_A M(f) = f \otimes_A 1_M$, que é um morfismo de B-módulos à direita.

Se $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família de A-módulos à direita e M é um A-módulo à esquerda, podemos mostrar que existe o isomorfismo funtorial

$$\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda\right) \otimes_A M \simeq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} (L_\lambda \otimes_A M),$$

ou seja, o funtor $\_ \otimes_A M$ preserva somas diretas. Podemos mostrar também que $\_ \otimes_A M$ é exato à direita, isto é, se $X \to Y \to Z \to 0$ é uma sequência exata em Mod A, então $X \otimes_A M \to Y \otimes_A M \to Z \otimes_A M \to 0$ é exata.

Adjunção

Sejam L um A-módulo à direita, M um $A-B$-bimódulo e N um B-módulo à esquerda. Neste caso, é possível mostrar que existe um isomorfismo

$$\text{Hom}_A(L, \text{Hom}_B(M,N)) \simeq \text{Hom}_B(L \otimes_A M, N)$$

funtorial em cada variável. Dizemos, portanto, que os funtores $\text{Hom}_B(M,\_)$ e $\_ \otimes_A M$ formam um par adjunto, ou ainda, que $\text{Hom}_B(M,\_)$ é adjunto à direita de $\_ \otimes_A M$ e que $\_ \otimes_A M$ é adjunto à esquerda de $\text{Hom}_B(M,\_)$.

O teorema de Watts

Considere A e B k-álgebras. Seja $F : \text{Mod } A \to \text{Mod } B$ um funtor k-linear covariante. As seguintes condições são equivalentes:

- F é exato à esquerda e preserva produtos diretos,
- existe um $B-A$-bimódulo M tal que $F \simeq \text{Hom}_A(M,\_)$,
- F admite um funtor adjunto à esquerda.

Ainda nas condições do resultado acima, são equivalentes:

- F é exato à direita e preserva somas diretas,
- existe um $A-B$-bimódulo M tal que $F \simeq \_ \otimes_A M$,
- F admite um funtor adjunto à direita.

Uma consequência do teorema de Watts

Sejam A uma k-álgebra e I um ideal bilateral de A. Consideramos o funtor $F : \text{Mod } A \longrightarrow \text{Mod } A/I$ que associa cada objeto M de Mod A a $F(M) = M/MI$, e cada morfismo $f : M \longrightarrow N$ em Mod A, o morfismo $F(f) : M/MI \longrightarrow N/NI$. É de fácil verificação que F é exato à direita e preserva somas diretas. Pelo teorema de Watts, F é isomorfo a $- \otimes_A (A/I)$, isto é, para todo A- módulo M, existe um isomorfismo funtorial

$$M/MI \simeq M \otimes_A A/I.$$

Referências

[1] ASSEM, IBRAHIM, *Algèbres et modules*, University of Ottawa, 1997.

[1] Universidade Federal do Paraná (amandafoetsch@gmail.com)
[2] Universidade Federal do Paraná (tanise@ufpr.br)