Formas Normais de Sistemas Forçados

MSc. Yovani Villanueva

Universidade Federal de Goiâs, Instituto de Matemática e Estatística

yovaniing@discente.ufg.br

Resumo

O tema deste trabalho é a teoria das formas normais de campos vetoriais suaves de sistemas forçados (sistemas de equações diferenciais-algébricas não lineares). Neste estudo entram a teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias, com tópicos como estabilidade, estabilidade estrutural, bifurcações, ciclos limite e catástrofes de equações diferenciais e a teoria das singularidades de funções. O objetivo do trabalho é a classificação e normalização dos sistemas forçados, primeiramente do ponto de vista local, mostraremos uma ideia da análise global e será nossa finalidade abordar esta teoria para variedades diferenciáveis de dimensão $n \geq 2$.

Introdução

Definimos a classe de sistemas que trabalhamos num primeiro momento em $\mathbb{R}^n$ pela equação diferencial:

$$A(p)p' = X(p), \tag{1}$$

onde $A(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear e $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo de vetores.

Formas Normais no Plano

Algoritmo 1: Método 1 de formas normais

Entrada: Sistema forçado $E = (A, V)$.
Saída: Formas normais típicas do sistema.

1. Trocar a linguagem para formas diferenciais.
2. Dar o Teorema de Transversalidade e a equivalência topológica.
3. Ofertar uma primeira classificação dos sistemas forçados.
4. Usar extensões de sistemas forçados
5. Refinar a classificação.

Lema 1. *Sejam $v|_0 = 0$ e os autovalores λ_1 e λ_2 de v, tais que são reais e $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}$. Assumimos que a curva $\{f = 0\}$ é transversal as autovetores da linearização de v. Então o germe de (v, f) é equivalente ao germe de*

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, x_1 - x_2 \right),$$

com $|\lambda| > 1$.

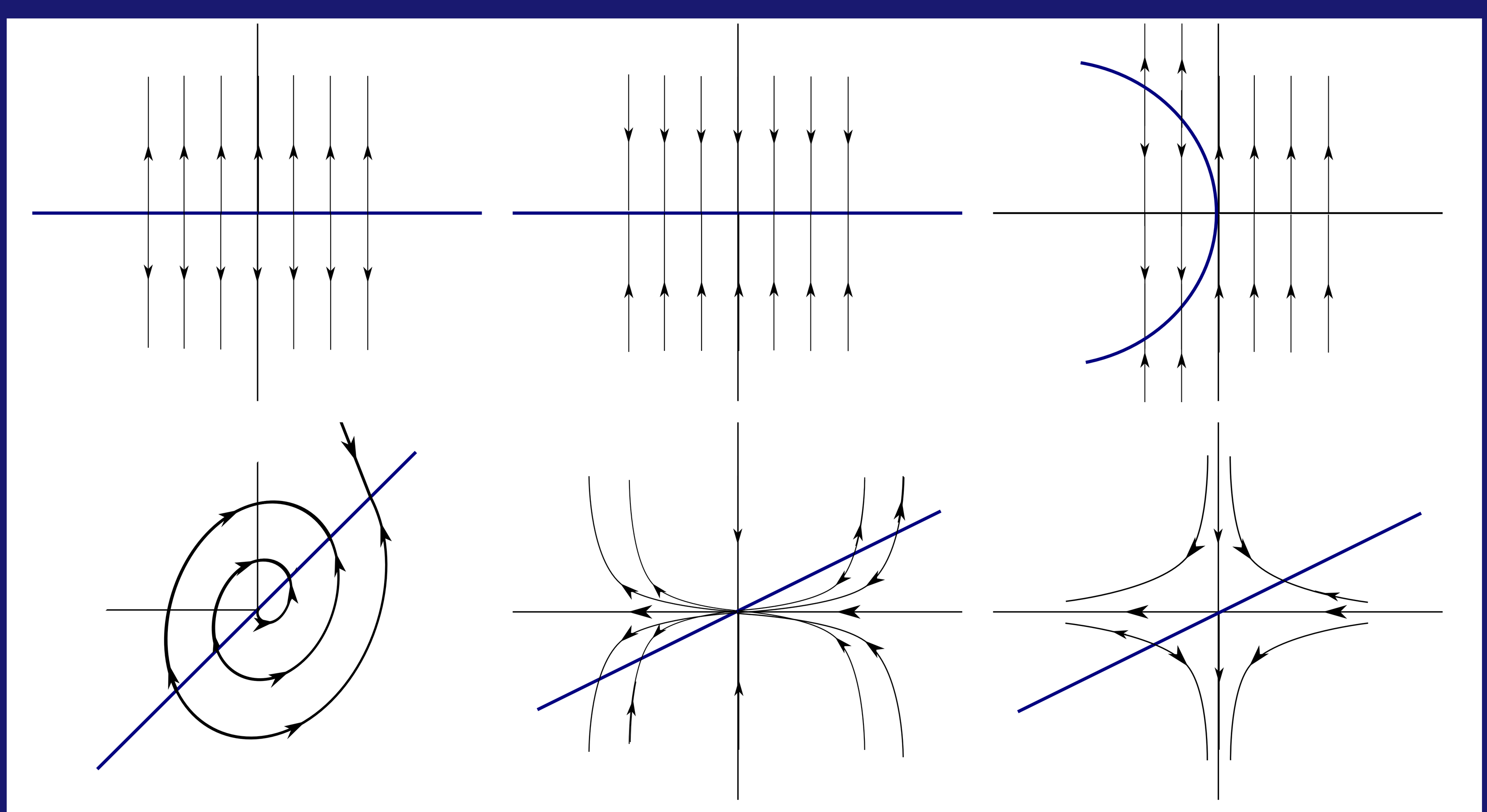

Figura 1: Retrato de fase das formas normais genéricas.

Estabilidade Estrutural e Formas Normais na Esfera $\mathbb{S}^2$

Definição 1. *Um sistema (A, F) é chamado estruturalmente estável se tem uma vizinhança $V \neq \emptyset$ em Z^r tal que (A, F) é topologicamente equivalente a todo $(B, G) \in V$.*

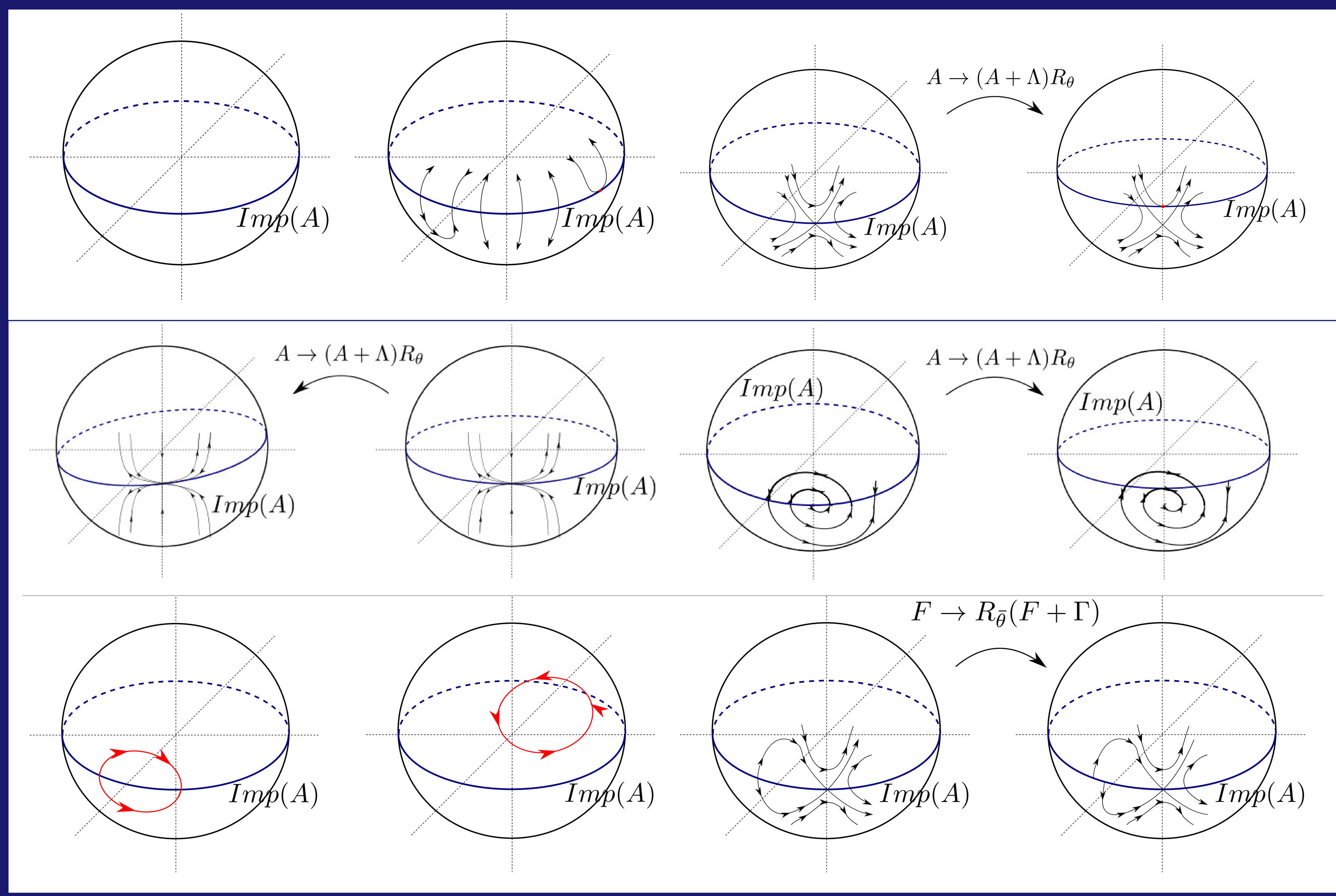

Figura 2: Classes de Estabilidade $\Sigma^r = \Sigma^r(\mathbb{S}^2) = \Sigma^r(1) \cap \Sigma^r(2) \cap \Sigma^r(3)$.

Lema 2. *Seja (A, F) um sistema forçado no plano (ou em $\mathbb{S}^2$) tal que o campo regularizado A^*F tem um ponto singular simples p com $p \in Imp(A)$. Para todo sistema perturbado (B, G) numa vizinhança de (A, F), o campo regularizado B^*G tem um único ponto singular simples q numa vizinhança de p tal que $q \in Imp(B)$.*

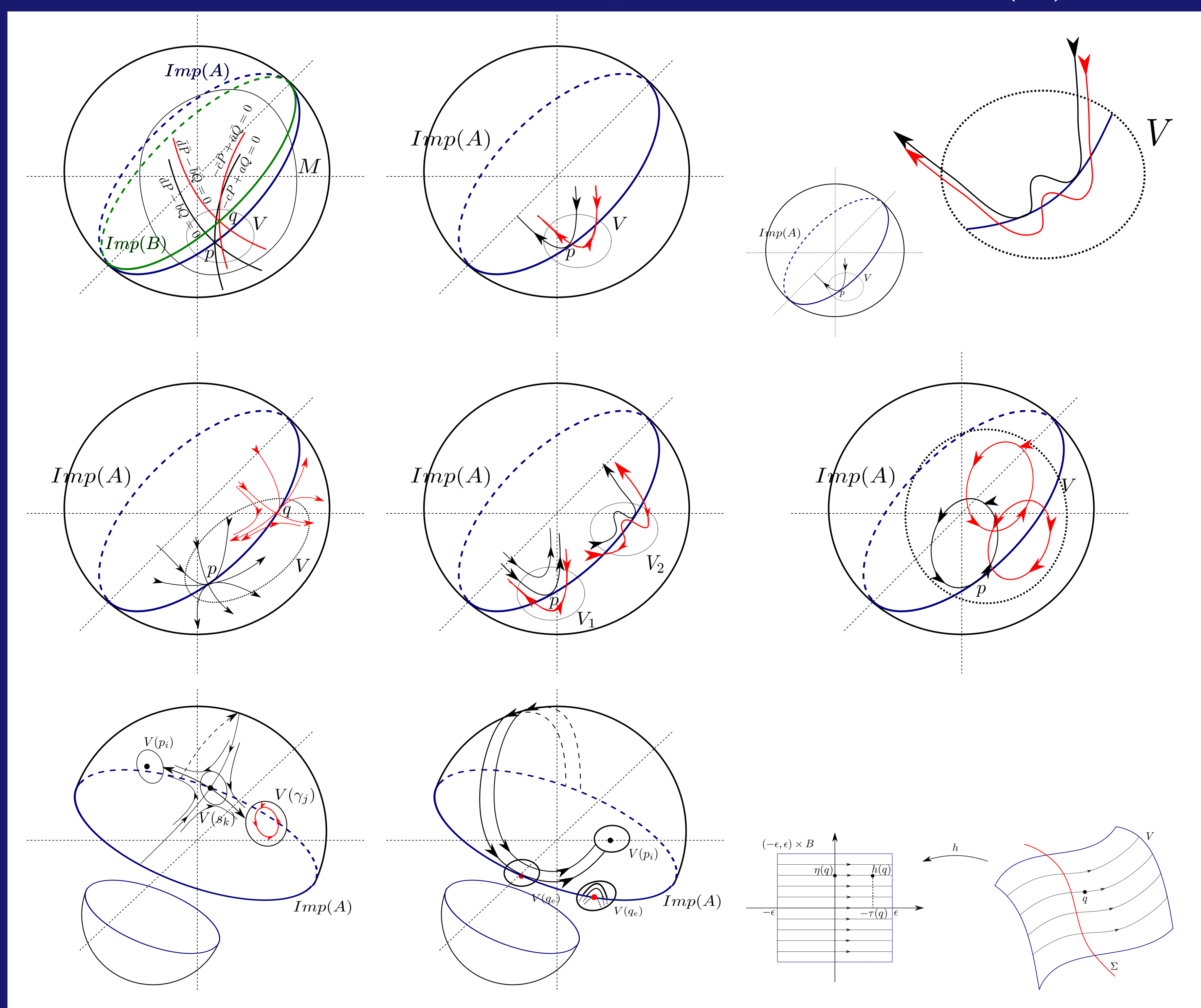

Figura 3: Para $r \geq 2$, $\phi^r = \Sigma^r$, Σ^r é aberto em $Z^r(\mathbb{S}^2)$ e $r \geq 2$, Σ^r é denso em $Z^r(\mathbb{S}^2)$.

Referências

[1] C. Buzzi, P. Da Silva, and J. Medrado. Peixoto's theorem for vector fields on $\mathbb{S}^2$ with impasse points. *Bull. Sci. math*, 137(2):691–704, 2013.

[2] Jean Martinet. Sur les singularités des formes différentielles. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 20(fasc. 1):95–178, 1970.

[3] Jorge Sotomayor. *Curvas definidas por equações diferenciais no plano*. 13o Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1981.

[4] M. Zhitomirskiĭ. Local normal forms for constrained systems on 2-manifolds. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 24(2):211–232, 1993.