Existência e comportamento assintótico das soluções fracas de uma equação de evolução não linear envolvendo o operador $p(x)-$Laplaciano

Willian dos Santos Panni & Jorge Ferreira

Universidade Federal Fluminense

willianpanni@id.uff.br & ferreirajorge2012@gmail.com

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de soluções fracas para uma E.D.P. de quarta ordem não linear envolvendo o operador $p(x)$-Laplaciano. Para demonstrar a existência de soluções fracas utilizamos o método de Faedo-Galerkin acoplado com resultados de Análise Funcional, espaços de Lebesgue e Sobolev com expoente variável que podem ser encontrados em [3]. Utilizamos uma técnica introduzida por Nakao em [1] e obtivemos o comportamento assintótico das soluções.

Introdução

Estudamos o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta\left(|\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u\right) - \Delta\dfrac{\partial u}{\partial t} + f\left(x,t,\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = g\left(x,t\right) \text{ em } Q_T, \\ u = \Delta u = 0 \text{ em } \partial\Omega\times(0,T)\,, \\ u\left(x,0\right) = u_0(x),\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x) \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Onde $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, $N\geq 3$, é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $0<T<\infty$, $Q_T=\Omega\times(0,T)$ e as funções p, f, g, u_0 e u_1 satisfazem as seguintes hipóteses:

(H.1) $p:\overline{\Omega}\to(1,\infty)$ é log-Hölder contínua e satisfaz

$$1<p^- = \inf_{\overline{\Omega}} p(x) \leq p^+ = \sup_{\overline{\Omega}} p(x) < \frac{N}{2} \quad \forall\, x\in\overline{\Omega}; \tag{2}$$

(H.2) $f\left(x,t,s\right)\in C\left(\Omega\times[0,\infty)\times\mathbb{R}\right)$ e existem constantes positivas c_1, c_2 e c_3 tais que

$$\begin{cases} f\left(x,t,s\right)s \geq c_1\left|s\right|^{q(x)} - c_3 \\ \left|f\left(x,t,s\right)\right| \leq c_2\left(\left|s\right|^{q(x)-1}+1\right) \end{cases} \tag{3}$$

para todo $(x,t,s)\in\Omega\times[0,\infty)\times\mathbb{R}$, onde $q:\overline{\Omega}\to(1,\infty)$ é log-Hölder contínua satisfazendo

$$1<q^- = \inf_{\overline{\Omega}} q(x) \leq q(x) < \frac{Np(x)}{N-2p(x)} \quad \forall\, x\in\overline{\Omega}; \tag{4}$$

(H.3) $u_0\in W^{2,p(x)}\left(\Omega\right)\cap W_0^{1,2}\left(\Omega\right)$, $u_1\in L^2\left(\Omega\right)$ e $g\in L^{q'(x)}\left(Q_T\right)$ onde

$$\frac{1}{q(x)}+\frac{1}{q'(x)} = 1 \quad \forall\, x\in\overline{\Omega}. \tag{5}$$

Existência de Soluções Fracas

Definição 1: A função $u:Q_T\to\mathbb{R}$ é solução fraca do problema (1) se satisfaz

$$u\in L^\infty\left(0,T;W_0^{2,p(x)}\left(\Omega\right)\right)\cap C\left(0,T;W_0^{1,2}\left(\Omega\right)\right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\in L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)\cap L^2\left(0,T;W_0^{1,2}\left(\Omega\right)\right)\cap L^{q(x)}\left(Q_T\right) \tag{7}$$

e

$$-\int_\Omega \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\varphi(x,0)dx - \int_{Q_T}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}dxdt + \int_{Q_T}\left|\Delta u\right|^{p(x)-2}\Delta u\Delta\varphi dxdt + \int_{Q_T}\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\nabla\varphi dxdt + \int_{Q_T} f\left(x,t,\frac{\partial u}{\partial t}\right)\varphi dxdt = \int_{Q_T} g\left(x,t\right)\varphi dxdt, \tag{8}$$

para todo $\varphi\in C^1\left(0,T;C_0^\infty\left(\Omega\right)\right)$ com $\varphi(x,T)=0$.

Lema 1: As seguintes estimativas são uniformes em relação a n.

$$\int_\Omega\left|\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}\right|^2 + \left|\Delta u_n(x,t)\right|^{p(x)} + \left|\nabla u_n(x,t)\right|^2 dx \leq c_4, \tag{9}$$

$$\int_{Q_T}\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|^{q(x)} + \left|\Delta u_n\right|^{p(x)} + \left|\nabla\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|^2 dxdt \leq c_5, \tag{10}$$

$$\left\|\left|\Delta u_n\right|^{p(x)-2}\Delta u_n\right\|_{L^{p'(x)}(Q_T)} + \left\|f\left(x,t,\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)\right\|_{L^{q'(x)}(Q_T)} \leq c_6. \tag{11}$$

Teorema 1: Sob as hipóteses (H.1), (H.2) e (H.3), o problema (1) tem solução fraca.

Utilizando o Lema (1), existe uma subsequência de $\{u_n\}$ e u tais que

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u_n}{\partial t} \overset{*}{\rightharpoonup} \dfrac{\partial u}{\partial t} & \text{em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{em } L^\infty(0,T;W_0^{2,p(x)}(\Omega))\cap L^\infty(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial t} \rightharpoonup \dfrac{\partial u}{\partial t} & \text{em } L^{q(x)}(Q_T)\cap L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)), \\ |\Delta u_n|^{p(x)-2}\Delta u_n \rightharpoonup |\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u & \text{em } L^{p'(x)}(Q_T), \\ f\left(x,t,\dfrac{\partial u_n}{\partial t}\right) \rightharpoonup f\left(x,t,\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) & \text{em } L^{q'(x)}(Q_T). \end{array}$$

Decaimento de Energia para Soluções Fracas

(H.4) $f\left(x,t,s\right)\in C\left(\Omega\times[0,\infty)\times\mathbb{R}\right)$ e existem constantes c_7 e c_8 tais que

$$\begin{cases} f\left(x,t,s\right)s \geq c_7\left|s\right|^{q(x)} \\ \left|f\left(x,t,s\right)\right| \leq c_8\left|s\right|^{q(x)-1} \end{cases} \tag{12}$$

Teorema 2: Sejam (H.1), (H.3), (H.4), $p^- > \max\left\{1,\dfrac{2N}{N+2}\right\}$ e $g(x,t)\equiv 0$. Então existem constantes $C>0$ e $\gamma>0$ tais que as soluções fracas satisfazem:

Se $q^-\geq 2$, então

$$\int_\Omega\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 + \left|\Delta u(x,t)\right|^{p(x)} dx \leq \begin{cases} Ce^{-\gamma t}, & \forall t\geq 0,\ \text{se } p^+=2, \\ C(t+1)^{-\frac{p^+}{p^+-2}}, & \forall t\geq 0,\ \text{se } p^+>2; \end{cases}$$

Se $1<q^-<2$, então

$$\int_\Omega\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 + \left|\Delta u(x,t)\right|^{p(x)} dx \leq \begin{cases} C(t+1)^{-\frac{p^+(q^--1)}{p^+-q^-}}, & \forall t\geq 0,\ \text{se } p^+<q^-, \\ Ce^{-\gamma t}, & \forall t\geq 0,\ \text{se } p^+\geq q^-. \end{cases}$$

Conclusões e Trabalhos Futuros

Estudamos a existência e o comportamento assintótico de soluções fracas para uma E.D.P. de quarta ordem com expoentes variáveis não lineares. Em trabalhos futuros demonstraremos que o problema (1) possui uma única solução fraca. Devido ao fato de não existir resultados na literatura referentes a análise numérica para problemas hiperbólicos com expoente variável estamos conjecturando utilizar o Método de Elementos Finitos, Método das Diferenças Finitas ou o Método de Ruth para analisarmos numericamente o referido problema.

Referências

[1] M. Nakao. Energy decay for the quasilinear wave equation with viscosity. *Mathematische Zeitschrift*, 219:289–299, 1995.

[2] S. Antontsev and J. Ferreira. On a viscoelastic plate equation with strong damping and $\overrightarrow{p}(x,t)$-Laplacian existence and uniqueness. *Journal Differential and Integral Equations*, 27:1147–1170, 2014.

[3] X. L. Fan and D. Zhao. On the spaces $\mathrm{L}^{p(x)}$ and $\mathrm{W}^{m,p(x)}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 263:424–446, 2001.