Polinômio de Chebyshev Generalizado

Willian J. S. Ramos & Vanessa Paschoa Ferraz

Universidade Federal de São Paulo - ICT

willianjorgee@hotmail.com
vanessa.paschoa@unifesp.br

Introdução

Os polinômios de Chebyshev aparecem em vários ramos das ciências exatas, em particular com a teoria na aproximação de funções. As raízes destes polinômios são reais e distintas e têm propriedades que geram muitas aplicações.

Uma propriedade que destaca os polinômios de Chebyhev, de primeira espécie, dos demais é a seguinte.

Proposição 1. *Os Polinômios de Chebyshev de primeira espécie na forma mônica* $\widetilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos(x))$ *satisfazem*

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} |\widetilde{T}_n(x)| \leq \max_{x\in[-1,1]} |P_n(x)|, \quad (1)$$

para todo $P_n(x)$ *polinômio de grau* n *, ocorrendo a igualdade somente quando* $P_n \equiv \widetilde{T}_n$. *Além disso, existem* $-1 := t_0^* < t_1 < ... < t_n^* := 1$ *tal que* $|\widetilde{T}(t_k^*)| = \max_{x\in[-1,1]} |\widetilde{T}(x)| \quad k = 0, ..., n.$

Um problema clássico é: se quisermos interpolar uma função em $n+1$ pontos em $[a,b]$ qual seria a melhor escolha destes pontos a fim de minimizar o erro de aproximação?

Teorema 1. *Sejam* $f \in C^{n+1}[a,b]$ *e* $n+1$ *pontos distintos em* $[a,b]$, $x_0, x_1, ..., x_n$. *Se* $P_n(x)$ *é o polinômio de interpolação, isto é,* $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *então o erro na interpolação é dado por*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\pi(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x), \quad a < \xi_x < b, \quad (2)$$

onde $\pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ *e* $\xi_x \in (a,b)$.

Portanto a melhor escolha para esses pontos são os zeros dos polinômios de Chebyshev de primeira espécie isto é, $\pi(x) = \widetilde{T}_n(x)$.

Problema de Interpolação de Hermite

Consideraremos agora, um problema mais geral, quando se procura um polinômio que interpole não somente a função, mas suas derivadas também.

Sejam $\{x_k\}_0^n$ pontos distintos da reta real que chamaremos de nós de interpolação. Sejam $\{\nu_k\}_0^n$ números inteiros positivos e y_{kl}, $k = 0, \ldots, n$ e $l = 0, \ldots, \nu_k - 1$. Denotemos por $N := \nu_0 + \cdots + \nu_n - 1$. O problema de construir um polinômio algébrico P de grau N, que satisfaz as condições

$$P^{(l)}(x_k) = y_{kl}, \; k = 0, \ldots, n, \; l = 0, \ldots, \nu_k - 1. \quad (3)$$

é conhecido como *problema de interpolação de Hermite*.

Teorema 2. *Para toda escolha dos nós de interpolação* $\{x_k\}_0^n$ *(*$x_i \neq x_j$ *para* $i \neq j$*) e para toda tabela de dados* $\{y_{kl}\}$ *o problema de interpolação de Hermite tem uma única solução.*

A existência do polinômio P que satisfaz (3) segue direto do sistema linear que surge com as $N+1$ equações (3) cujas incógnitas são os $N+1$ coeficientes do polinômio P. O determinante deste sistema ser zero implica que o sistema homogêneo

$$P^{(l)}(x_k) = 0, \; k = 0, \ldots, n, \; l = 0, \ldots, \nu_k - 1$$

tem uma solução não-nula $P(x) = a_0x^N + \cdots + a_{N-1}x + a_N$ (i.e., com pelo menos um coeficiente a_i diferente de zero). Mas, as condições acima significam que P tem $N+1$ zeros, contando as multiplicidades. Como P tem grau N então $P(x) \equiv 0$ e daí $a_0 = \ldots = a_N = 0$. Chegamos a uma contradição. Logo o determinante é diferente de zero e o sistema dado por (3) tem solução única.

O polinômio que satisfaz a condição (3) é denotado por $H_N(f;x)$ e chamado de polinômio de interpolação de Hermite.

Polinômio de Chebyshev Generalizado

Definição 1. *Dados* $\{\nu_k\}_0^n$ *inteiros positivos, existe um único polinômio mônico*

$$\tau_*(x) := \Pi_{j=1}^n (x - x_j^*)^{\nu_j}$$

onde $-1 < x_1^* < \cdots < x_n^* < 1$ *com* $n+1$ *pontos* $-1 := t_0^* < t_1^* < ... < t_n^* := 1$ *tal que* $|\tau_*(t_k^*)| = \max_{x\in[-1,1]} |\tau_*(x)| \quad k = 0, ..., n.$

Veremos que por (4) e pela propriedade 1, que o polinômio generalizado de Chebyshev é o que nos fornece o erro mínimo na interpolação.

Erro de Interpolação de Hermite

Teorema 3. *Sejam* $a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$ *e* $\{\nu_k\}_0^n$ *inteiros positivos. Suponha que* f *tem derivada contínua de ordem* $N+1$ *em* $[a,b]$, $N := \nu_0 + \cdots + \nu_n - 1$. *Então, para todo* $x \in [a,b]$, *existe* $\xi \in [a,b]$, *tal que*

$$f(x) - H_N(f;x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{\nu_0}\cdots(x-x_n)^{\nu_n}. \quad (4)$$

Demonstração. A demonstração de (4) é feita da mesma maneira que a demonstração do caso de interpolação de Lagrange. Construimos a função

$$F(z) = f(z) - H_N(f;z) - C\Omega(z)$$

e escolhemos C de modo que $F(z)$ tem raiz $z = x$. Então, $F(z)$ tem $N+2$ zeros: $\{x_k\}_0^n$ com multiplicidades $\{\nu_k\}_0^n$ e o ponto x. Pelo teorema de Rolle, $F^{(N+1)}(z)$ tem pelo menos um zero entre a maior e a menor raíz de $F(z)$. Denotamos esse zero por ξ. Obtemos C pela igualdade $F^{(N+1)}(\xi) = 0$ e pela condição $F(x) = 0$. O resultado é (4).

Outras Propriedades

Sejam $\{\nu_k\}_0^n$ e P um polinômio arbitrário da forma

$$P(z) := c\Pi_{j=1}^n (z - x_j)^{\nu_j}, \; (-1 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1) \quad (5)$$

então

1. $||\tau_*(\nu;\cdot)||_\infty = \inf_{x_j\in[-1,1]} ||\Pi_{j=1}^n (x-x_j)^{\nu_j}||_\infty.$
2. $\tau_*(\nu; t_k^*) = (-1)^{\sigma_k}||\tau_*(\nu;\cdot)||_\infty. \; -1 := t_0^* \leq t_1^* \leq \cdots \leq t_n^* := 1, \; \sigma_0 = 0, \; \sigma_k := \nu_{k+1} + \cdots + \nu_n, \; k = 0, \ldots, n-1.$
3. $||P^{(k)}||_p \leq \frac{||\tau_*^{(k)}(\nu;\cdot)||_p}{||\tau_*(\nu;\cdot)||_\infty}||P||_\infty. \; p \in [1,\infty], \quad k = 0, \ldots N.$
4. $|P^{(k)}(z)| \leq \frac{|\tau_*^{(k)}(\nu;z)|}{||\tau_*(\nu;\cdot)||_\infty}||P||_\infty. \; \forall z \notin (-1,1), \; k = 0, \ldots N.$

Referências

[1] Borislav D Bojanov. A generalization of chebyshev polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 26(4).

[2] Borislav D Bojanov, H Hakopian, and B Sahakian. *Spline functions and multivariate interpolations*, volume 248. Springer Science & Business Media, 2013.

[3] Borislav D Bojanov and QI Rahman. On certain extremal problems for polynomials. *Journal of mathematical analysis and applications*, 189(3):781–800, 1995.

[4] T.J. Rivlin. *Chebyshev Polynomials: From Approximation Theory to Algebra and Number Theory*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 1990.