Grafos de Cayley

Wanessa Ferreira Tavares

Universidade Federal do Amazonas

wanessa_adonai@yahoo.com.br

Resumo

A Teoria dos Grafos é um campo da Matemática que surgiu no século XVIII, as ideias básicas foram introduzidas pelo famoso matemático suíço Leonhard Euler. Ele usou grafos para resolver o problema hoje conhecido como As sete pontes de Königsberg. A teoria de grafos tem extensa aplicabilidade na área de Matemática, principalmente na modelagem matemática, que permite interpretar e analisar várias situações reais em Física, Química, Biologia, Engenharia, Pesquisa Operacional, Psicologia e Teoria da Computação. Com o desenvolvimento da ciência da computação, a teoria sobre grafos tem permitido obter resultados importantes de modelos matemáticos que representam várias situações reais e auxiliam na solução de diversos problemas.

Introdução

Os grafos de Cayley foram introduzidos por Arthur Cayley em 1878, com o intuito de associar a teoria dos grupos à teoria dos grafos. A teoria dos grupos estuda as estruturas algébricas conhecidas como grupos. Um grafo é um par $G = (V, E)$ onde V é um conjunto não vazio cujos elementos são chamados vértices e E é um conjunto cujos elementos são chamados arestas. Cada aresta é um subconjunto com dois vértices. Denotamos por $V(G)$ o conjunto de vértices e $E(G)$ o conjunto de arestas de G.

Exemplo 1. *Designado em homenagem ao matemático Danes Julis Petersen por grafo de Petersen, esta estrutura combinatória possui 10 vértices e 15 arestas, como podemos observar na figura 1.*

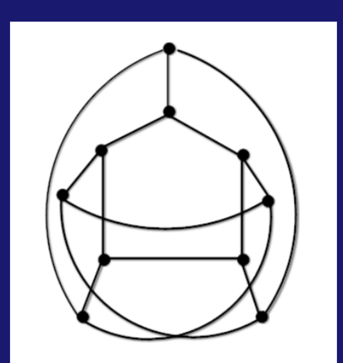

Figura 1: Título da Figura

Os grafos de Cayley surgiram para representar graficamente os grupos abstratos e, assim, estudar suas estruturas.

Definição 1. *Seja $(\mathfrak{g}, \cdot)$ um grupo, e seja B um subconjunto de $\mathfrak{g}$ tal que a identidade do grupo $1_{\mathfrak{g}} \notin B$.*
Suponha que $B^{-1} = \{b^{-1} : b \in B\} = B$. ***O grafo de Cayley*** *$X' := Cay(\mathfrak{g}, B)$ é um grafo não orientado possuindo o conjunto de vértices $V(X') = \mathfrak{g}$ e o conjunto de arestas $E(X') = \{\overline{ab} : a \cdot b^{-1} \in B, a, b \in \mathfrak{g}\}$. Chama-se B o* ***conjunto conector****.*

Exemplo 2. *Seja $\mathfrak{g} = \mathbb{Z}_5, B = \{\bar{1}, \bar{4}\} = B^{-1}$, então $X' = Cay(\mathbb{Z}_5, B)$. Veja Figura 2.*

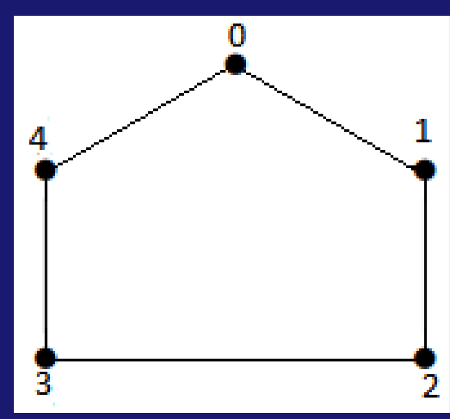

Figura 2: Título da Figura

Exemplo 3. *Seja $\mathfrak{g} = \mathbb{Z}_6, B = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}\} = B^{-1}$, então $X' = Cay(\mathbb{Z}_6, B)$. Veja Figura 3.*

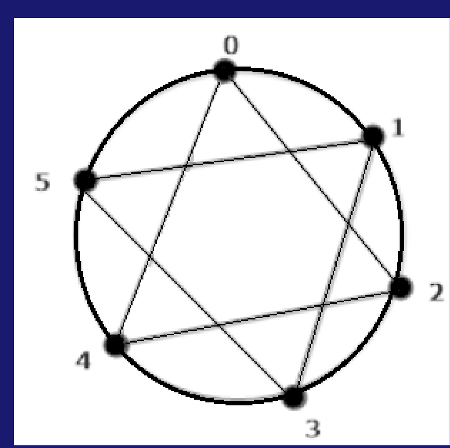

Figura 3: Título da Figura

Definição 2. *Um grafo é conexo, se para todo par de vértices $\{v, w\}$, existe um caminho simples com extremos v e w. Caso contrário, o grafo é desconexo. Veja Figura 4.*

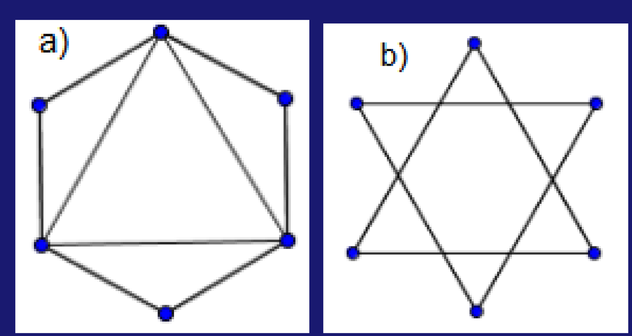

Figura 4: a) conexo; b) não-conexo

Propriedades gerais

Teorema 1. *$X' = Cay(\mathfrak{g}, B)$ é um grafo $|B|$-regular.*

Demonstração. Seja $a \in V(X') = \mathfrak{g}$. A cada $b \in B$ associemos $x_b \in \mathfrak{g}$ da forma $x_b := b^{-1}a \in \mathfrak{g}$. Veja que

$$\begin{aligned} x_b &= x_{\tilde{b}} \\ b^{-1}a &= \tilde{b}^{-1}a \\ b^{-1}aa^{-1} &= \tilde{b}^{-1}aa^{-1} \\ b^{-1} &= \tilde{b}^{-1} \\ (b^{-1})^{-1} &= (\tilde{b}^{-1})^{-1} \\ b &= \tilde{b} \end{aligned}$$

isto é, cada $x_b \in \mathfrak{g}$ está associado a um único $b \in B$. Veja que

$$b = (b^{-1}aa^{-1})^{-1} = (x_b a^{-1})^{-1} = a x_b^{-1}$$

ou seja, cada $b \in B$ é uma aresta adjacente a a. Logo, $grau(a) = |B|$. Como a é arbitrário, o grafo X' é regular de grau igual a cardinalidade de B. □

Proposição 1. *A função $\sigma_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ definida por $\sigma_g(a) = g \star a$ e com ação definida por $g \star a := a \cdot g^{-1}$ para todo $g, a \in \mathfrak{g}$, onde g é um elemento fixo de $\mathfrak{g}$, é automorfismo de X'.*

Teorema 2. *O grafo de Cayley $X' = Cay(\mathfrak{g}, B)$ é transitivo pelo vértice.*

Teorema 3. *Se $X' = Cay(\mathfrak{g}, B)$ é conexo então B é um conjunto gerador de $\mathfrak{g}$.*

Exemplo 4. *Nem todo grafo de Cayley é conexo. Contra-exemplo $\mathfrak{g} = \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$, $B = \{\bar{2}\} = B^{-1}$.*

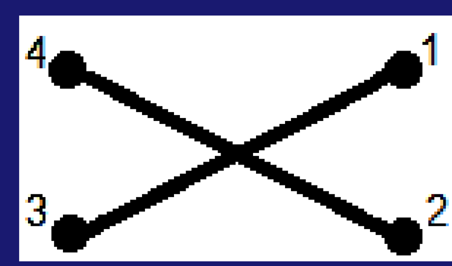

Figura 5: Título da Figura

Teorema 4. *$Aut(X')$ contém um subgrupo regular isomorfo a $\mathfrak{g}$.*

Referências

[1] ORTIZ, A. A. A. D.; MOREIRA, T. G. V. Tpicos na interseo entre a Teoria dos Grafos e lgebra. Sociedade Brasileira de Matemtica. Rio de Janeiro, 2016.

[2] GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. Elementos de lgebra. Instituto de Matemtica Pura e Aplicada, 6ł edio, 2018.

[3] GALDINO, A. L. Grupos, Subgrupos e Homomorfismo de Grupos. Notas de aula-IMTec/RC/UFG.

[4] DUMMIT, D. S.; FOOTE, R. M. Abstract algebra. Wiley Hoboken, 2004. v. 3.

[5] CHARTRAND, G.; LESNIAK, L.; ZHANG, P. Graphs & digraphs. Chapman and Hall/CRC, 6ł edition, 2010.

[6] HARARY, F. Graph theory. Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[7] GOLDBARG, M.; GOLDBARG, E. Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicaes. Elsevier, 2012.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada(IMPA) pela oportunidade de divulgar este trabalho. Manifesto meus agradecimentos ao comitê organizador do 32º Colóquio Brasileiro de Matemática. Agradeço também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM).