# Superfícies Regradas no espaço Euclidiano

Souza, Vítor Emanoel R. e Pina, Romildo S.
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Goiás, Brasil
vresplandes.math@gmail.com, romildo@ufg.br,

## Introdução

A geometria diferencial é o estudo de geometria utilizando cálculo diferencial. O estudo de superfícies diferenciáveis é muito importante e parte fundamental do desenvolvimento dessa geometria

Este trabalho consiste em desenvolver o estudo de uma classe de superfícies muito conhecidas e importantes, as superfícies regradas, que possuem como principal característica o fato de serem folheadas por retas. Serão apresentados alguns dos principais exemplos dessas surpefícies, mostraremos que sua curvatura gaussiana é sempre negativa, por fim provaremos que a única superfícies regrada mínima completa é o helicóide.

## 1 Superfícies Regradas

**Definição 1.** *Uma superfície é chamada regrada, se pode ser parametrizada da seguinte maneira*

$$f(u,v) = \alpha(u) + v \cdot \beta(u)(*)$$

*Onde $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada diferenciável $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$ um vetor associado a cada ponto da curva.*

*Dizemos que a superfície parametrizada por (*) é gerada pela familia a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(u), \beta(u)\}$ $L_t$ é a reta dada, fixado um t.*

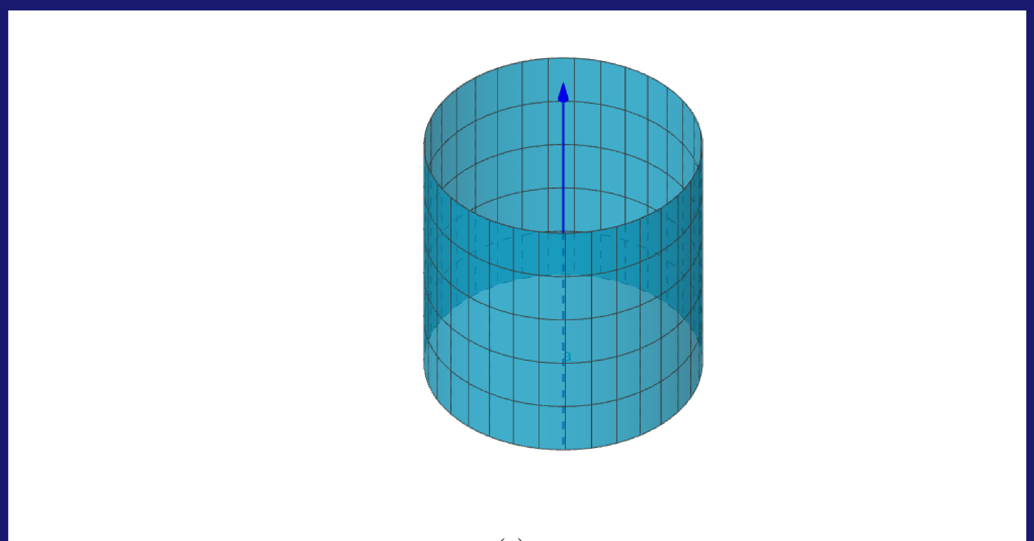
**Definição 2.** *Uma superfície é dita mínima se sua curvatura média (H) é constante igual a 0.*

**Observação 1.** *Todas as superfícies mencionadas no trabalho são de classe $C^\infty$*

**Exemplo 1.** *Cilindro*

*Um cilindro é uma superfície regrada gerada por uma família 1-parâmetro de retas $\{\alpha(u), \beta(u)\}$, onde $\alpha(u)$ está contida em um plano P e $\beta(u)$ uma direção fixa em $\mathbb{R}^3$não paralelo a P. Assim podemos generalizar uma parametrização de cilindro como:*

$$f(u,v) = \alpha(u) + v \cdot \beta_0$$

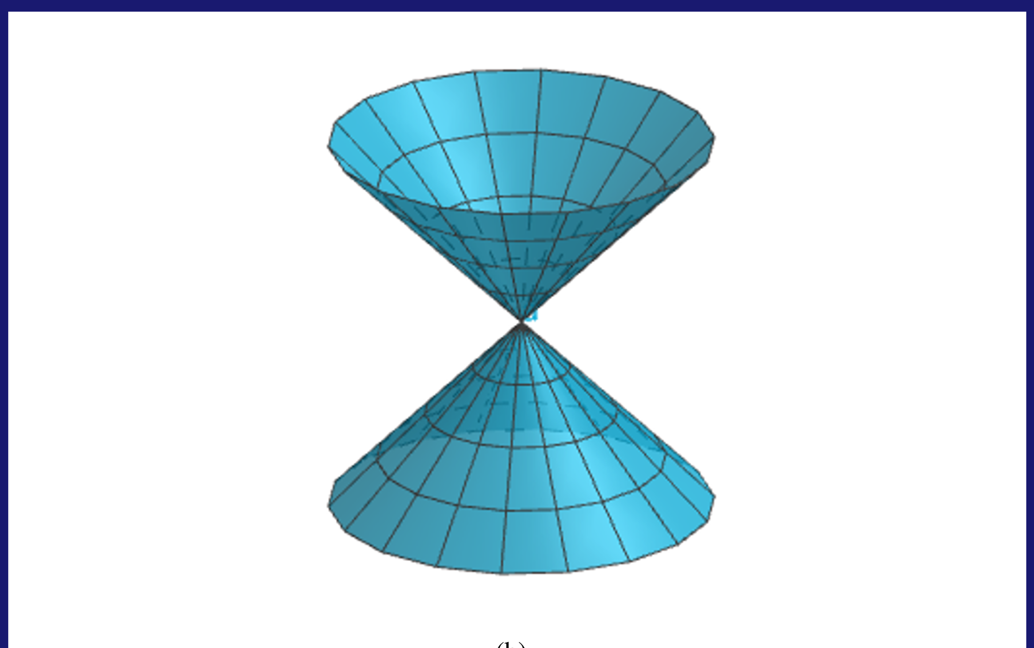


(a)

**Exemplo 2.** *Cone*

*Um cone é uma superfície regrada gerada por uma família 1-parâmetro de retas $\{\alpha(u), \beta(u)\}$, onde $\alpha(u)$ está contida em um plano P e todas as retas $L_t$ passam por um ponto $p \in \mathbb{R}^3$. Também é possível generalizar a parametrização do cone como:*

$$f(u,v) = v \cdot \beta(u) + p$$



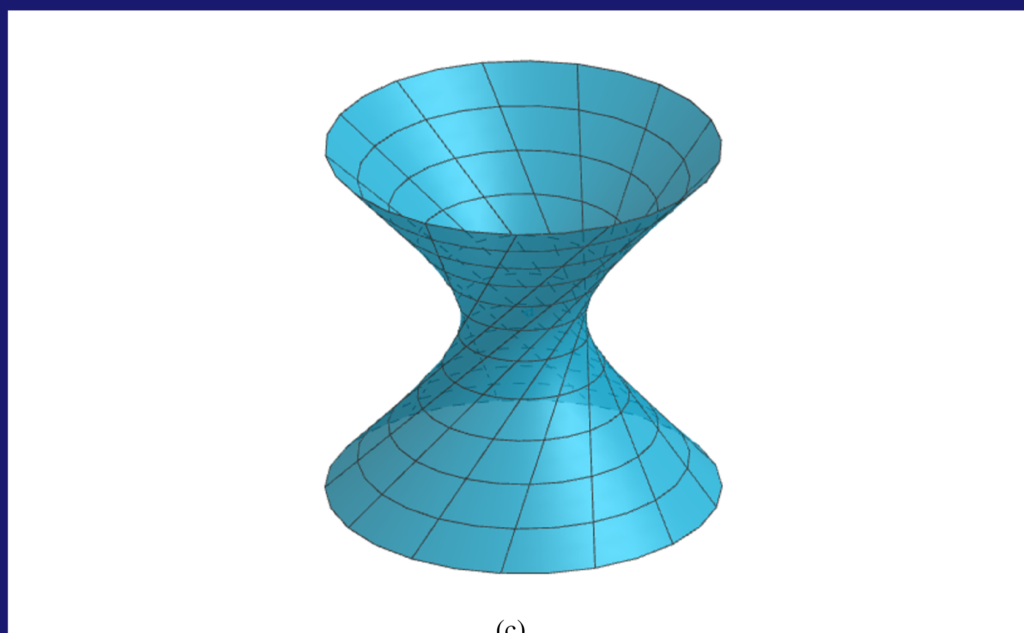
(b)

**Exemplo 3.** *Hiperbolóide*

*Seja $\mathbb{S}^1$ o círculo unitário, $x^2 + y^2 = 1$ no plano $z = 0$, e $\alpha(u)$ uma parametrização de $\mathbb{S}^1$ pelo comprimento de arco. Para cada u, seja $\beta(u) = \alpha'(u) + (0,0,1)$*

*Desse modo, podemos escrever*

$$f(u,v) = \alpha(u) + v(\alpha'(u) + (0,0,1))$$



(c)

## 2 Linha de estricção

**Proposição 1.** *Seja S uma superfície regrada e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização, definida por $f(u,v) = \alpha(u) + v \cdot \beta(u)$ então existe uma reparametrização $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ da formaa $f_2(u,v) = \alpha_2(u) + v \cdot \beta_2(u)$ tal que:*

*(I) $\|\beta_2\| = 1$*

*(II) $\langle \alpha_2'(u), \beta_2'(u) \rangle = 0$*

**Solução 1.** *(I) Basta tomarmos*

$$\beta_2 = \frac{\beta(u)}{\|\beta\|}$$

**Observação 2.**

$$\|\beta_2\| = 1 \Longrightarrow \langle \beta_2(u), \beta_2'(u) \rangle = 0$$

*(II)Suponha que tal curva exista, logo $\alpha_2(u)$ está em S, isto é*

$$\alpha_2(u) = \alpha(u) + r(u) \cdot \beta(u)(1)$$

*, onde r(u) é uma função real.*

*De fato, basta tomar*

$$r(u) = \frac{\langle \alpha'(u), \beta_2'(u) \rangle}{\|\beta_2'(u)\|^2}(2)$$

*Assim, definimos $\alpha_2(u)$ pelas equações (1) e (2) que obteremos a curva desejada.*

*A curva $\alpha_2(u)$ é chamada de linha de estricção.*

## 3 Curvatura Gaussiana

**Proposição 2.** *Seja S uma superfície regrada, então a curvatura Gaussiana é não positiva em todo ponto de S.*

**Solução 2.** *Seja, $f(u,v) = \alpha(u) + v \cdot \beta(u)$ uma parametrização de S e suponha sem perda de generalidade que $\alpha$ é linha de estricção. Sabendo que $K = \frac{det(II)}{det(I)}$ Assim,*

$$II = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} e & \frac{\langle f_u \times f_v, f_{uv} \rangle}{|f_u \times f_v|} \\ \frac{\langle f_u \times f_v, f_{uv} \rangle}{|f_u \times f_v|} & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

*Desse modo,*

$$K = \frac{-(\frac{\langle f_u \times f_v, f_{uv} \rangle}{|f_u \times f_v|})^2}{det(I)}$$

*Observe que na função acima, o numerador é sempre não positivo e o denomindor é positivo (Afinal é comprimento de vetor).*

*Logo, K é sempre não positivo para todo ponto de S.*

## 4 Superfície mínima regrada

**Proposição 3.** *Toda superfície mínima regrada completa é o helicóide.*

**Solução 3.** *Seja S uma superfície regrada, dada a parametrização $X(t,v) = \alpha(t) + v\beta(t)$ suponha sem perda de generalidade que:*

$\langle \alpha', \beta \rangle = 0$

$\langle \beta, \beta \rangle = 1 \Rightarrow \langle \beta', \beta \rangle = 0$

$\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1 \Rightarrow \langle \alpha", \alpha' \rangle$

*Observe que a primeira e segunda forma fundamental da superfície é:*

$$I = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 + v^2\langle \beta', \beta' \rangle + 2v\langle \alpha', \beta' \rangle & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

*E ainda,*

$$II = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}_{2\times 2} == \begin{bmatrix} \frac{\langle \alpha" + v\beta", \alpha' \times \beta + v\beta' \times \beta \rangle}{\sqrt[2]{EG - F^2}} & \frac{\langle \beta', \alpha' \times \beta \rangle}{\sqrt[2]{EG - F^2}} \\ \frac{\langle \beta', \alpha' \times \beta \rangle}{\sqrt[2]{EG - F^2}} & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

*Calculando a curvatura média, concluímos que S é mínima se e somente se,$e = 0$*

*Por outro lado, se $e = 0$ então: $e = 0 \Leftrightarrow$*

$\langle \alpha", \alpha' \times \beta \rangle = 0(*)$ *e*

$\langle \alpha", \beta' \times \beta \rangle + \langle \beta", \alpha' \times \beta \rangle = 0(**)$

$\langle \beta", \beta' \times \beta \rangle = 0(***)$

*Logo,*
*De $(*)$ $\langle \alpha", \alpha' \times \beta \rangle = 0$*
*O que nos permite concluir que, $\alpha' \times \beta \perp \alpha"$ e já tinhamos, $\alpha" \perp \alpha'$ Desse modo, $\alpha" = k_\alpha \beta(iv)$*
*De $(***)$*
*Obtemos que $\beta"$ pertence ao plano gerado por $\beta'$ e $\beta$ (Denotado por $P_1$), e ainda,Temos que $\alpha" \perp \beta' \times \beta$ Assim, $\langle \alpha", \beta' \times \beta \rangle = -\langle \beta", \alpha' \times \beta \rangle = 0$*

*Obtemos que $w"$ pertence ao plano gerado por $\alpha'$ e $\beta$ (Denotado por $P_2$)*
*Como a interseção desse plano é não vazia, caímos em 02 casos:*

*Caso 01 ($p_1 = p_2$) :*
*Nesse caso, concluimos que S é um plano.*

*Caso 02 ($P_1 \neq P_2$):(Que é o caso mais interessante)*
*A interseção é uma reta na direção de $\beta$, como $\beta"$ está nos dois planos, temos que $\beta = \lambda\beta"$*
*Consequentemente $\langle \beta', \beta" \rangle = 0$*
*Observe que $\langle \alpha', \beta \rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha", \beta \rangle = -\langle \alpha', \beta' \rangle$ Assim:*

$$k_\alpha = k\alpha\langle \beta, \beta \rangle = \langle \alpha", \beta \rangle = -\langle \alpha', \beta' \rangle$$

$$k_\alpha' = -(\langle \alpha", \beta' \rangle + \langle \alpha', \beta" \rangle) = 0$$

*A curvatura é constante.*
*Já para torçao,*

$$\tau_\alpha = \langle e_2', e_1 \times e_2 \rangle$$

*Onde $e_2 = \frac{\alpha"}{|\alpha"|}$ ; $e_1 = \alpha'$ Assim:*

$$\tau_\alpha = \langle \beta', \alpha' \times \beta \rangle \Rightarrow$$

$$\tau_\alpha = \langle \beta", \alpha' \times \beta \rangle + \langle \beta', \alpha" \times \beta + \alpha' \times \beta' \rangle = 0$$

*Logo, $\tau$ é constante. Assim, $\alpha$ é hélice. Para encontrar $\beta$ basta usar que $\alpha" = \lambda\beta$ Nesse caso, concluímos que S é um helicóide.*

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos uma família muito especial de superfícies, que são as superfícies regradas e provamos um problema de rigidez mostrando que toda superfície mínima completa regrada é o helicóide.

## Referências Bibliográficas

[1] KUHNEL, W. Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds.Second Edition. Germain: AMS, 2003.

[2] CARMO, M.P. Geometria diferencial de curvas e superfícies. Rio de Janeiro: SBM,2005

[3] TENENBLAT, K. Introducão à geometria diferencial. Brasília: Editora da UNB, 1988.

[4] OPREA, J. Differential Geometry and it Applications. 1.ED. London: Prentice Hall, 1997.