Equivalência de Categorias em Geometria Algébrica Clássica

Vitor Carreiro Ramalho   Frederico Sercio Feitosa (Orientador)

Departamento de Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora

Álgebras

Definição: Seja A um anel comutativo com unidade, uma Álgebra sobre A ou uma **A-álgebra** é um anel $B = (A, \odot)$, tal que:

- B é um A-módulo.
- $\odot : B^2 \to B$ é um mapa A-bilinear.

Definição: Sejam um anel A e B, C duas A-álgebras. Um **morfismo de A-álgebras** $f : B \to C$ é um morfismo entre os anéis B e C que satisfaz a condição:

$$f(a \cdot b) = a \cdot f(b) \text{ para todo } a \in A \text{ e } b \in B.$$

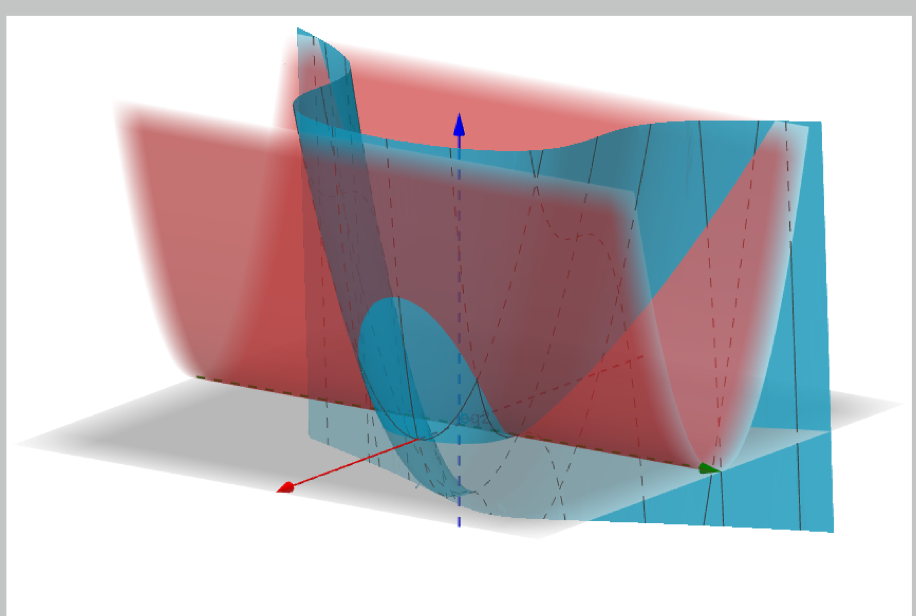
Definição: Uma K-álgebra A é chamada reduzida se $\sqrt{\langle 0\rangle} = \langle 0\rangle$, ou seja A não contem elementos nilpotentes não nulos.

Conjuntos Algébricos

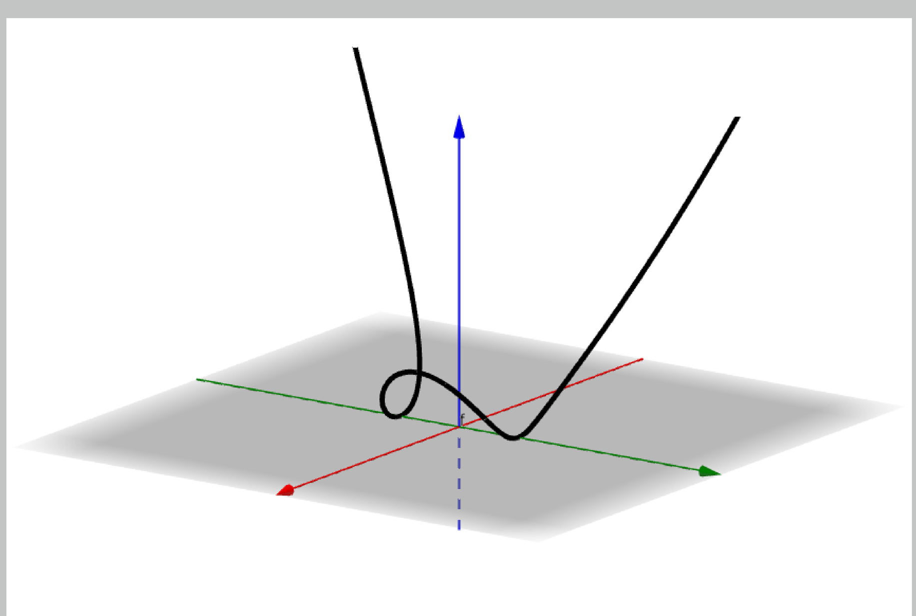
Definição: Dado $K[X_1, \cdots, X_n]$ um anel de polinômios, S um conjunto não vazio desse anel. O conjunto $\mathbb{A}^n_K$ de todas as n-uplas $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, onde $a_1, a_2, \cdots, a_n \in K$, é chamado de **n-espaço afim**. Definimos o **conjunto algébrico afim** $V(S)$ como o conjunto dos zeros de S, isto é:

$$V(S) \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{A}^n_K \mid f(x) = 0, \forall f \in S\}.$$

Exemplo: Considere as superfícies $S(X_2, X_1) = X_2^2 + X_1^3 - 1$ e $R(X_1, X_3) = X_3 - X_1^2$ em $\mathbb{A}^3_K$.



Note que $V(X_2^2 + X_1^3 - 1, X_3 - X_1^2) \subset \mathbb{A}^3_K$ é a interseção entre as duas superfícies



Definição: Sejam $V \subseteq \mathbb{A}^n_K$ e $W \subseteq \mathbb{A}^m_K$ dois conjuntos algébricos. Chamaremos uma aplicação $\varphi : V \to W$ de um **morfismo de conjuntos algébricos** se para todo $\alpha = (a_1, \cdots, a_n) \in V$ existirem $f_1, \cdots, f_m \in K[X_1, \cdots, X_n]$, tais que

$$\varphi(\alpha) = (f_1(a_1, \cdots, a_n), \cdots, f_m(a_1, \cdots, a_n)).$$

Definição: Seja o conjunto algébrico $V \subseteq \mathbb{A}^n_K$. Considere $\mathcal{F}(V : K)$ o anel de todas as funções $V \to K$ e o homomorfismo de anéis que leva um polinômio na função polinomial correspondente:

$$\begin{aligned} \gamma : K[X_1, \cdots, X_n] &\longrightarrow \mathcal{F}(V : K) \\ p(X_1, \cdots, X_n) &\longmapsto p' : V \to K \\ &\qquad (v_1, \cdots, v_n) \mapsto p(v_1, \cdots, v_n) \end{aligned}$$

Definimos o **anel de funções regulares** em V como a imagem do homomorfismo γ:

$$K[V] \stackrel{def}{=} \{f : V \to \mathbb{A}^1_K \mid f \text{ é um morfismo de conjuntos algébricos}\}.$$

Teorema dos Zeros

Definição: Seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{A}^n_K$. Definimos o ideal de $\mathcal{A}$ como

$$\mathfrak{I}(\mathcal{A}) = \{f \in K[X_1, \cdots, X_n] | f(\alpha) = 0, \forall \alpha \in \mathcal{A}\}$$

Teorema: *(Nullstellensatz)* Seja J um ideal de $K[X_1, \cdots, X_n]$. Então:

$$\mathfrak{I}(V(J)) = \sqrt{J}$$

Categorias e Funtores

Definição: Uma **categoria** D consiste de um conjunto de **objetos**, $\mathrm{Obj}(\mathscr{D})$, para cada $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ um conjunto de **morfismos** denotado por $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, B)$ e uma lei associativa de composição entre morfismos:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B, C) &\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, C) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

Exemplo:

1. Os conjuntos algébricos construídos sobre K, com morfismos de conjuntos algébricos formam uma categoria que denotaremos por $\mathscr{C}$.
2. As K-álgebras finitamente geradas reduzidas e o conjunto de morfismos de K-álgebras, formam uma categoria $\mathscr{R}$.

Definição: Sejam duas categorias $\mathscr{A}, \mathscr{B}$. Um **funtor** $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ é uma regra que associa um elemento $F(X) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$ para todo elemento $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ e um morfismo $F(\phi) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(X), F(Y))$ para cada $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y)$ respeitando as leis de composição.

Definição: Sejam $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, o funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ é:

1. **pleno** se, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(A), F(B))$ é sobrejetiva.
2. **fiel** se, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(A), F(B))$ é injetiva.
3. **plenamente fiel** se F é pleno e fiel.
4. **essencialmente sobrejetivo** se, para todo objeto $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$ exista $A \in \mathscr{A}$ tal que $F(A) \cong B$ em $\mathscr{B}$.
5. **equivalência de categorias** se F é plenamente fiel e essencialmente sobrejetivo.

O Funtor Γ

Definição: Seja $\varphi : V \to W$ um morfismo dos conjuntos algébricos $V \subseteq \mathbb{A}^n_K$ e $W \subseteq \mathbb{A}^m_K$. Definimos o **pullback** associado a φ como o morfismo de K-álgebras induzido por composição com f.

$$\begin{aligned} \varphi^* : K[W] &\to K[V] \\ f &\mapsto \varphi^*(f) = f \circ \varphi \end{aligned}$$

Definição: Definimos o funtor Γ como.

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathrm{Obj}(\mathscr{C}) &\to \mathrm{Obj}(\mathscr{R}) \\ V &\mapsto \Gamma(V) = K[V] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{V,W} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V, W) &\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{R}}(\Gamma(W), \Gamma(V)) \\ \varphi &\mapsto \Gamma(\varphi) = \varphi^* \end{aligned}$$

Equivalência

Teorema: O funtor Γ é uma equivalência de categorias.

Prova: Sejam $V \subseteq \mathbb{A}^n_K$, $W \subseteq \mathbb{A}^m_K$. Definimos a função regular de W.

$$\begin{aligned} \sigma_i : W &\longrightarrow \mathbb{A}^1_K \\ w = (w_1, \cdots, w_m) &\longmapsto \sigma_i(w) = \overline{X_i}(w) = w_i \end{aligned}$$

Para todo morfismo de conjuntos algébricos $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m) : V \to W$, para todo $1 \le i \le m$ temos

$$\varphi^*(\sigma_i) = \sigma_i \circ \varphi = \sigma_i(\varphi_1, \cdots, \varphi_m) = \varphi_i. \qquad (1)$$

- Γ é fiel.
  Dados $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V, W)$ tais que $\Gamma(\phi) = \Gamma(\psi)$, então $\phi^* = \psi^*$ e de (1) temos
  $$\phi_i = \phi^*(\sigma_i) = \psi^*(\sigma_i) = \psi_i \quad , \forall\, i = 1, \cdots, m$$
  segue que $\phi = \psi$, e portanto, $\Gamma_{V,W}$ é injetor.
- Γ é pleno.
  Dado um morfismo de K-álgebras, $\theta : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$, seja $\varphi_i = \theta(\sigma_i)$ para todo $1 \le i \le m$. Então definimos
  $$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow \mathbb{A}^m_K \\ v &\longmapsto \varphi(x) = (\varphi_1(v), \cdots, \varphi_m(v)) \\ &\stackrel{def}{=} (\theta(\sigma_1)(v), \cdots, \theta(\sigma_m)(v)) \end{aligned}$$
  Devemos mostrar que $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(V,W)}$. Basta mostrar que $\varphi(V) \subseteq W$. Seja $f \in \mathfrak{I}(W)$. Note que $\varphi(V) \subseteq W$ se, e somente se, $f|_{\varphi(V)} = 0$ ou equivalentemente $f \circ \varphi = 0$.
  $$\begin{aligned} 0 = \theta(0) &= \theta(f|_W) = \theta(f \circ (\sigma_1, \cdots, \sigma_m)) \\ &= (\theta \circ f) \circ (\sigma_1, \cdots, \sigma_m) = (f \circ \theta) \circ (\sigma_1, \cdots, \sigma_m) \\ &= f \circ (\theta(\sigma_1), \cdots, \theta(\sigma_m)) = f(\varphi_1, \cdots, \varphi_m) \\ &= f \circ \varphi. \end{aligned}$$
  Logo, $\Gamma_{V,W}$ é sobrejetor.

Continuação

- Γ é essencialmente sobrejetor.
  Dado, A uma K-álgebra finitamente gerada reduzida sejam $a_1, \cdots, a_n$ elementos geradores de A. Considere a projeção:
  $$\begin{aligned} K[X_1, \cdots, X_n] &\twoheadrightarrow A \\ f(X_1, \cdots, X_n) &\mapsto f(a_1, \cdots, a_n) \end{aligned}$$
  Tomemos I como o núcleo dessa projeção. Logo, temos um isomorfismo induzido
  $$A \cong \frac{K[X_1, \cdots, X_n]}{I}$$
  Note que em $K[X_1, \cdots, X_n]/I$, $I = \overline{0}$. Logo em A temos
  $$I = 0 = \sqrt{0} = \sqrt{I}$$
  Pelo Nullstellensatz $\mathfrak{I}(V(I)) = I$. Assim concluímos que
  $$A \cong \frac{K[X_1, \cdots, X_n]}{\mathfrak{I}(V(I))} = K[V(I)]$$
  $\square$

Corolário: Dados $V, W \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. $V \simeq W$ em $\mathscr{C}$ se, e somente se, $K[W] \simeq K[V]$ em $\mathscr{R}$.

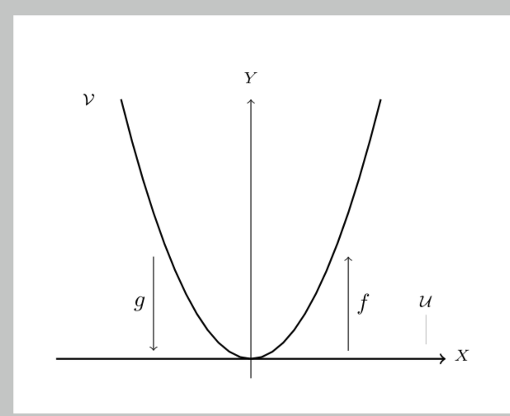
Exemplo 1

Sejam $\mathcal{U} = \mathbb{A}^1_K, \mathcal{V} = V(Y - X^2), \mathcal{W} = V(Y^2 - X^3)$

a) considerando $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ temos

$$K[\mathcal{U}] \simeq \frac{K[X, Y]}{\mathfrak{I}(\mathcal{U})} = K[X]$$

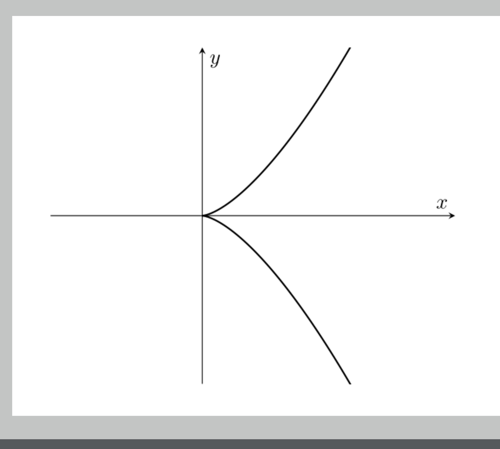
$$K[\mathcal{V}] \simeq \frac{K[X, Y]}{\mathfrak{I}(\mathcal{V})} = K[X, X^2]$$



Logo $V(Y - X^2) \simeq \mathbb{A}^1_K$

b) Por outro lado temos que $K[X, X^3] \subsetneq K[X]$ assim:

$$\begin{aligned} &K[\mathcal{U}] \simeq \\ &K[X] \not\simeq K[X^2, X^3] \\ &\simeq K[\mathcal{W}] \\ &\Downarrow \\ &\mathbb{A}^1_K \not\simeq V(Y^2 - X^3) \end{aligned}$$



Exemplo 2

Sejam $\mathcal{E} = V(Y^2 - X^3 + 1) \subset \mathbb{A}^2_K$ e $\mathcal{D} = V(X_2^2 + X_1^3 - 1\ ,\ X_3 - X_1^2) \subset \mathbb{A}^3_K$. Definimos

$$\begin{aligned} \psi : E &\longrightarrow D \\ X &\longmapsto -X_1 \\ Y &\longmapsto X_2 \\ X^2 &\longmapsto X_3 \end{aligned}$$

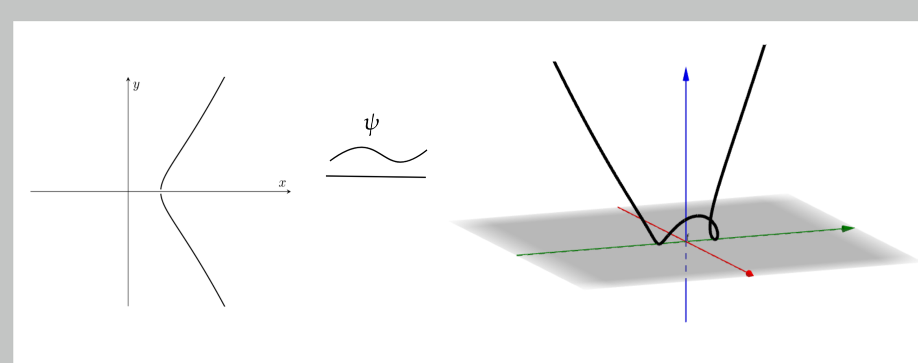
Sejam $I = \langle X_2^2 + X_1^3 - 1\ ,\ X_3 - X_1^2\rangle$ e $J = \langle Y^2 - X^3 + 1\rangle$. Assim o pullback correspondente é

$$\begin{aligned} \psi^* : K[X_1, X_2, X_3]/I &\to K[X, Y]/J \\ \overline{g(X_1, X_2, X_3)} &\mapsto \overline{g \circ \psi(X_1, X_2, X_3)} = \overline{g(-X, Y, X^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo} \quad K[\mathcal{D}] &= K[X_1, X_2, X_3]/I \simeq \\ K[X_1] \oplus X_2K[X_1] &\stackrel{\psi^*}{\simeq} K[X] \oplus YK[X] \\ &\simeq K[X, Y]/J = K[\mathcal{E}] \end{aligned}$$

O que implica em

$$V(Y^2 - X^3 + 1) \stackrel{\psi}{\simeq} V(X_2^2 + X_1^3 + 1\ ,\ X_3 - X_1^2)$$



Referências

[1] David Mumford.
The Red Book of Varieties and Schemes.
New York: Springer, (Lecture Notes in Mathematics), 2th edition, 1999.

[2] E Tengan and H Borges.
Algebra comutativa em quatro movimentos.
Rio de Janeiro: IMPA, (Projeto Euclides), 2015.

[3] Kenji Ueno.
Algebraic Geometry: From algebraic varieties to schemes, volume 1.
Providence: AMS, (Translations of Mathematical Monographs), 1999.

vitocr5@hotmail.com   fred.feitosa@ufjf.edu.br