Uma prova por indução do Teorema de Tychonoff e sua equivalência com o Axioma da Escolha

Vinícius Franco Vasconcelos & Pedro José Catuogno & Marcelo Esteban Coniglio

Universidade Estadual de Campinas

v.f.v.math@gmail.com

Resumo

É bastante difundido no meio acadêmico matemático que o Teorema de Tychonoff (TT) é equivalente ao Axioma da Escolha (AC), porém geralmente só é apresentada a implicação AC $\Rightarrow$ TT, quase sempre utilizando o Lema de Zorn. Tendo isso em vista, procuramos mostrar a recíproca TT $\Rightarrow$ AC bem como uma prova por indução do Teorema de Tychonoff. A demonstração parte do Teorema de Zermelo e é um exemplo de aplicação de indução transfinita à Topologia.

Introdução

O Axioma da Escolha tem várias formulações possíveis. Uma delas, a que utilizamos nesse trabalho, diz que o produto cartesiano arbitrário de conjuntos não-vazios é não-vazio. Uma observação a ser feita é que o Axioma da Escolha não é necessário no produto cartesiano de uma quantidade finita de conjuntos.

O Teorema de Zermelo, equivalente ao Axioma da Escolha, diz que todo conjunto Z pode ser bem ordenado, isto é, existe uma ordem em Z para a qual todo subconjunto não-vazio de Z tem mínimo.

Todo conjunto bem-ordenado é isomorfo a um ordinal (isomorfismo de ordens), onde faz sentido falar de sucessor. Um ordinal diferente de zero que não é sucessor é chamado de ordinal limite. A indução transfinita sobre os ordinais generaliza a indução finita sobre os naturais e diz que, dada uma fórmula $\phi(x)$, se:

(i) $\phi(0)$ é verificada;

(ii) $\alpha = \nu + 1$ e $\phi(\nu)$ é verificada implica que $\phi(\alpha)$ é verificada;

(iii) α é um ordinal limite e $\phi(\nu)$ é verificada para todo $\nu < \alpha$ implica que $\phi(\alpha)$ é verificada;

então $\phi(\alpha)$ é verificada para todo ordinal α.

O Teorema de Tychonoff é uma equivalência do Axioma da Escolha no contexto de Topologia. Ele diz que o produto arbitrário de compactos é compacto.

O Axioma da Escolha implica o Teorema de Tychonoff

Demonstração. Sejam $\{K_\iota : \iota \in \alpha\}$ uma família de compactos indexada por um ordinal α e $X_\alpha = \prod_{\iota \in \alpha} K_\iota$. O Teorema de Zermelo garante que não há perda de generalidade ao assumir que o conjunto de índices é um ordinal.

(i) Se $\alpha = 0$, então X_α tem apenas um ponto, logo é compacto. Se $\alpha = 1$, temos $X_\alpha = K_0$, que é compacto.

(ii) Se $\alpha = \nu + 1$, supondo X_ν compacto, temos $X_\alpha \simeq X_\nu \times K_\nu$, e o produto de dois compactos é compacto.

(iii) Se α é um ordinal limite, suponha X_ν compacto para todo $\nu < \alpha$.

Se $K_\iota = \varnothing$ para algum $\iota \in \alpha$, temos $\prod_{\iota \in \alpha} K_\iota = \varnothing$, que é compacto. Caso contrário, para cada $\iota \in \alpha$ fixe um $x_\iota \in K_\iota$.

Considere $X_\nu = \prod_{\iota \in \nu} K_\iota \simeq \prod_{\iota \in \alpha} L_\iota^\nu = Y_\nu \subseteq X_\alpha$, em que $L_\iota^\nu = K_\iota$ se $\iota \in \nu$ e $L_\iota^\nu = \{x_\iota\}$ caso contrário (isto é, $Y_\nu = \{x \in X_\alpha : \forall \iota \in \alpha \setminus \nu\ (\pi_\iota(x) = x_\iota)\}$, e temos $Y_\nu \subseteq X_\alpha$ compacto). Note que se $\beta < \gamma < \alpha$, então $Y_\beta \subseteq Y_\gamma$.

Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta de X_α. Sendo $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$, temos, para cada $i \in I$, $A_i = \bigcup_{j \in J_i} B_j$, onde cada B_j é um aberto básico (em particular $\{\xi \in \alpha : \pi_\xi(B_j) \neq X_\xi\}$ é finito). Seja $\mathcal{B} = \{B_j : j \in J\}$ em que $J = \bigcup_{i \in I} J_i$ (note que $\mathcal{B}$ é uma cobertura aberta de X_α).

Tome $\kappa < \alpha$. Como $\mathcal{B}$ é cobertura aberta de Y_κ, existe $\mathcal{B}_\kappa \subseteq \mathcal{B}$ subcobertura finita de Y_κ. Seja

$$\mu = \max(\{\xi \in \alpha : \exists B \in \mathcal{B}_\kappa\ (\pi_\xi(B) \neq X_\xi)\} \cup \{0\})$$

(existe pois o conjunto é finito). Como $\mathcal{B}$ é cobertura aberta de Y_μ, existe $\mathcal{B}_\mu \subseteq \mathcal{B}$ subcobertura finita de Y_μ.

Por construção, obtemos que $\mathcal{B}_\kappa \cup \mathcal{B}_\mu$ é uma cobertura finita de X_α. Para cada $B \in \mathcal{B}_\kappa \cup \mathcal{B}_\mu$, tome um $A_B \in \mathcal{A}$ tal que $B \subseteq A_B$, e seja $\mathcal{A}' = \{A_B : B \in \mathcal{B}_\kappa \cup \mathcal{B}_\mu\}$. Temos que $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ é uma subcobertura finita de X_α, logo X_α é compacto. □

O Teorema de Tychonoff implica o Axioma da Escolha

Demonstração. Seja $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família de conjuntos não-vazios.

Para cada $\lambda \in \Lambda$, seja $Y_\lambda = X_\lambda \cup \{X_\lambda\}$ e considere em Y_λ a topologia $\mathcal{T}_\lambda = \{\varnothing, Y_\lambda, X_\lambda, \{X_\lambda\}\}$.

Claro que Y_λ é compacto (uma vez que $\mathcal{T}_\lambda$ é finita, toda cobertura aberta de Y_λ é finita). Assim, temos pelo Teorema de Tychonoff que $Y = \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ é compacto.

Para cada $\kappa \in \Lambda$, seja $A_\kappa = \prod_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda^\kappa$, em que $W_\lambda^\kappa = Y_\lambda$ se $\lambda \neq \kappa$ e $W_\kappa^\kappa = \{X_\kappa\}$ (isto é, $A_\kappa = \{x \in Y : \pi_\kappa(x) = X_\kappa\}$), e tome $\mathcal{A} = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Note que $\mathcal{A}$ é um conjunto de abertos de Y.

Dado $\Lambda' \subseteq \Lambda$ finito, existe $\varphi \in \prod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda$ (pois o produto é finito), logo $\varphi \cup \{(\lambda, X_\lambda) : \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'\} \in Y \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda$, isto é, $\mathcal{A}$ não tem um subconjunto finito que cobre Y, o que implica que $\mathcal{A}$ não é uma cobertura de Y, logo $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = Y \setminus \bigcup \mathcal{A} \neq \varnothing$. □

Referências

[1] T. Jech. *Set Theory*. Springer, 3rd millennium edition, 2002.

[2] J. L. Kelley. The tychonoff product theorem implies the axiom of choice. *Fund. Math.*, pages 75–78, 1950.

[3] J. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 2nd edition, 2000.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.