Resolubilidade e Singularidades Removíveis Para a Equação div $F = \mu$

Victor Sandrin Biliatto [1]
Orientador: Prof. Tiago Henrique Picon [2]

[1] Universidade Federal de São Carlos
[2] Universidade de São Paulo

victorbiliatto@dm.ufscar.br
picon@ffclrp.usp.br

Resumo

O artigo [3], de Nguyen Cong Phuc e Monica Torres, apresenta resultados que caracterizam a existência de soluções em L^p, com $1 \leq p \leq \infty$, ou contínuas, e singularidades removíveis para a equação

$$\text{div}\, F = \mu, \tag{1}$$

no qual μ é uma medida de Radon.

Aqui, apresentamos os resultados do caso em que $F \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Introdução

Se $F \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é um campo vetorial, com $1 \leq p \leq \infty$, então, div$F$ define uma distribuição como

$$\text{div}\, F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} F \cdot \nabla\varphi \, dx \quad , \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Definição 1. Dizemos que div $F = \mu$ se

$$\text{div}\, F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Definição 2. Seja $1 < p < \infty$. Uma medida de Radon positiva μ tem energia-$(1,p)$ finita se

$$\int_{\mathbb{R}^n} [I_1\mu(x)]^p \, dx < \infty,$$

no qual I_1 é o *potencial de Riesz de ordem 1* definido por

$$I_1\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \, d\mu(y).$$

Definição 3. Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, e

$$\mathcal{A}(K) = \{\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) : 0 \leq \varphi \leq 1,\ \varphi = 1 \text{ em } K\},$$

então definimos a $(1,p')$-*capacidade de Sobolev* do conjunto K por

$$\text{cap}_{1,p'}(K) = \inf_{\varphi \in \mathcal{A}(K)} \int_\Omega |\nabla\varphi|^{p'} \, dx.$$

O seguinte resultado é útil em algumas demonstrações:

Lema de Frostman. *Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Então $\mathcal{H}^s(B) > 0$ se, e somente se, existe uma medida de Radon μ, concentrada em B, com $0 < \mu(B) < \infty$, tal que $\mu(B(x,r)) \lesssim r^s$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Mais ainda, podemos encontrar μ de modo que $\mu(B) \geq c\mathcal{H}^s_\infty(B)$, no qual $c > 0$ depende apenas de s.*

Demonstração. Se μ existe, tome uma coleção $\{B(x_j, r_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $B \subset \cup_{j=1}^\infty B(x_j, r_j)$. Então, $\mu(B) \lesssim \sum_{j=1}^\infty \alpha(s)(2r_j)^s$, de onde obtemos que $0 < \mu(B) \lesssim \mathcal{H}^s_\infty(B)$ e, portanto, $\mathcal{H}^s(B) > 0$.

Seja $\mathcal{D}_k$ a coleção dos cubos diádicos de lados 2^{-k}. Podemos assumir que B está contido em algum cubo diádico. Fixado $m \in \mathbb{N}$, definimos μ_m^m de modo que $\mu_m^m(Q) = 2^{-ms}$ para todo $Q \in \mathcal{D}_m$ tal que $B \cap Q \neq \varnothing$. Fazemos μ_m^m com densidade constante em cada $Q \in \mathcal{D}_m$. Se, para algum $Q \in \mathcal{D}_{m-1}$, temos $\mu_m^m(Q) > 2^{-(m-1)s}$, então reduzimos a densidade do Q correspondente de modo que a massa em Q se torne $2^{-(m-1)s}$. Denotamos a função resultante por μ_{m-1}^m.

Repetimos tal procedimento, aumentando o tamanho dos cubos, até que $B \subset Q_{k_0}$ para algum $Q_{k_0} \in \mathcal{D}_{m-k_0}$ e definimos $\mu^m = \mu_{m-k_0}^m$.

A função μ^m satisfaz $\mu^m(Q) \leq 2^{-(m-k)s}$, para todo $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$, com $k \in \mathbb{Z}_+$.

Definindo $\nu^m = \mu^m(\mathbb{R}^n)^{-1}\mu^m$, temos que $\nu^m(Q) \lesssim 2^{-(m-k)s}$, para $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$, com $k \in \mathbb{Z}_+$. A sequência (ν^m) possui uma subsequência fracamente convergente $\nu^{m_j} \xrightarrow{W} \nu$, no qual ν é uma medida de Radon positiva. Temos que ν é concentrada em B e

$$\nu(B(x,r)) \lesssim r^s.$$

□

Resolubilidade

No caso em que $n/(n-1) < p < \infty$, a existência de uma solução para (1) é caracterizada pela energia-$(1,p)$ de μ.

Teorema 1. *Suponha $n/(n-1) < p < \infty$. Se $F \in L^p(\mathbb{R}^n)$ é solução de* div $F = \mu$, *para alguma medida de Radon positiva μ, então μ possui energia-$(1,p)$ finita. Reciprocamente, se μ é uma medida de Radon positiva com energia-$(1,p)$ finita, então existe um campo vetorial $F \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que* div $F = \mu$.

Resultado análogo ao anterior existe quando $p = \infty$.

Teorema 2. *Se μ é uma medida de Radon positiva tal que*

$$\mu(B(x,r)) \leq Cr^{n-1}, \quad \text{para todo } r > 0, x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

para alguma constante $C > 0$, que independe de x e r, então existe um campo vetorial $F \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz div $F = \mu$. *Reciprocamente, se $F \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ é tal que* div $F = \mu$ *para alguma medida de Radon positiva μ, então μ satisfaz a propriedade (2).*

Singularidades Removíveis

Teorema 3. *Sejam E um conjunto compacto e U um conjunto aberto tais que $E \subset U \subset \mathbb{R}^n$, μ uma medida de Radon com sinal em U tal que $\mu(E) = 0$ e $n/(n-1) < p \leq \infty$ (ou seja, $1 \leq p' < n$).*

Se $\text{cap}_{1,p'}(E) = 0$, *então toda solução F de*

$$\text{div}\, F = \mu \quad em\ U \setminus E,\ F \in L^p_{loc}(U) \tag{3}$$

é uma solução de

$$\text{div}\, F = \mu \quad em\ U,\ F \in L^p_{loc}(U). \tag{4}$$

Reciprocamente, suponha que exista pelo menos um campo vetorial $\tilde{F}$ solução de (4) e suponha que toda solução de (3) é também solução de (4). Então, necessariamente, $\text{cap}_{1,p'}(E) = 0$.

Referências

[1] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press Inc., 1992.

[2] P. Mattila. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*. Cambridge University Press, 1995.

[3] N. C. Phuc and M. Torres. Characterizations of the existence and removable singularities of divergence-measure vector fields. *Indiana University Mathematics Journal*, 57(4):1573–1597, 2008.

Agradecimentos

Projeto financiado pelo processo nº 2017/20250-2 da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).