Introdução a Teoria dos Grafos e classificação de superfícies fechadas

Vicente Ferreira Rezende Filho & Flávio Gomes de Moraes

Universidade Federal de Goiás

vrezendefilho@gmail.com

impa

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Esse trabalho tem como objetivo o estudo de tópicos de topologia geométrica, e tem como ponto de partida a referência [1]. Inicialmente, o estudo da teoria de grafos foi motivado pelo problema das sete pontes de Koenigsberg. Em seguida, será apresentado algumas superfícies fechadas orientáveis e não-orientáveis, sendo elas a Esfera, a Garrafa de Klein, o Toro e o Plano Projetivo, explorando algumas de suas definições topológicas.

Introdução

De primeiro momento, precisamos compreender a problemática das sete pontes de Koenigsberg, uma cidade da antiga Prússia. No centro da respectiva cidade, o Rio Pregel é dividido em dois sentidos, formando uma ilha entre eles. Sendo assim, o problema surgiu a partir do questionamento se era possível efetuar um passeio sobre as sete pontes, passando somente uma vez em cada ponte. Dessa maneira, Leonhard Euler tomando posse do problema, usou conceitos matemáticos que foram desenvolvidos e se tornando na Teoria dos Grafos.

Abordado o problema das sete pontes usando a Teoria de Grafos, será discutido em seguida algumas definições de superfícies fechadas, com o objetivo de demonstrar que toda superfície fechada orientável é ou a esfera S^2, ou o toro T^2, ou uma soma conexa de dois ou mais toros, e toda superfície não-orientável é o plano projetivo P^2, ou uma soma conexa de dois ou mais planos projetivos.

Objetivos

1. Determinar se a problemática das sete pontes de Koenigsberg tem solução.
2. Demonstrar que toda superfície fechada orientável é ou a esfera S^2, ou o toro T^2, ou a soma conexa de dois ou mais toros.
3. Demonstrar que toda superfície fechada não-orientável é o plano projetivo P^2, ou a soma conexa de dois ou mais planos projetivos

Resultados

Temos o seguinte Teorema:

Teorema 0.1. *Se um grafo planar admite um passeio de Euler, começando num vértice e terminando em outro, então os vértices final e inicial do passeio são ímpares e todos os demais vértices do grafo têm ordem par.*

Demonstrao: Seja B um vértice de modo que ele não seja o fim nem o início do passeio, sendo assim, toda vez que chegamos a ele, partimos em seguida, logo, terá um número par de arestas apoiando-se nele. Seja C o vértice inicial do passeio, então, ao calcular sua ordem, contamos 1 na partida e mais 2 cada vez que passamos por ele, logo a ordem de C é ímpar. Da mesma forma, para o vértice final, somamos 2 quando passamos por ele e mais 1 na chegada, logo é um vértice ímpar.

Dessa forma, é possível facilmente analisar que o problema das sete pontes de Koenigsberg não tem solução, pois o grafo planar possui quatro vértices de ordem ímpar, logo o grafo não admite um Passeio de Euler.

Entendemos superfícies fechadas como sendo aquelas que não possuem bordo, entre elas possuem as que são orientáveis e não-orientáveis. Sendo assim, considerando algum habitante fictício que está passeando por essa superfície, se a superfície inverter a orientação desse habitante, ento ela é chamada de superfície não-orientável, e consequentemente, quando a superfície não inverte a orientação é chamada de superfície orientável. Considerando as somas conexas de duas superfícies, os diagramas e suas respectivas palavars representações, a partir de oito transformações podemos considerar que:

Propriedade 0.2. *Toda superfície fechada, não-orientável, é um plano projetivo ou uma soma conexa de dois ou mais planos projetivos.*

Propriedade 0.3. *Toda superfície fechada orientável é uma esfera ou um toro ou uma soma conexa de dois ou mais toros.*

Conclusão

- A problemática das sete pontes de Koenigsberg não tem solução.
- Toda superfície fechada, não-orientável, é um plano projetivo ou uma soma conexa de dois ou mais planos projetivos.
- Toda superfície fechada orientável é uma esfera ou um toro ou uma soma conexa de dois ou mais toros.

Referências

[1] VIEIRA SAMPAIO, JOÃO CARLOS. Uma introdução á Topologia Geométrica: Passeios de Euler,superfícies e o teorema das quatro cores, EdUFSCar

[2] ARMSTRONG, M. A.Basic Topology. New York: Springer- Verlag, 1980.

[3] TENENBLAT, KETI.Introdução á Geometria Diferencial. Editora Blucher, 2 Edição.

[4] CARMO, MANFREDO PERDIGÃO DO. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Editora SBM, 5 Edição.

Agradecimentos

Agradeço a comissão avaliadora do colóquio, agradeço também ao IMPA pela oportunidade de participar desse evento que vai contribuir com a minha formação acadêmica.