Decomposição de Jordan-Chevalley

Valéria Maria Ruela & Marcelo Moreira

Universidade Federal de Alfenas-MG

valeriamariaruela@gmail.com & marcelo.moreira@unifal-mg.edu.br

Introdução

Os estudos acerca das álgebras de Lie, inauguram-se a partir da tentativa do matemático Norueguês, Marius Sophus Lie (1842-1899), de criar uma teoria que permitisse trabalhar com as equações diferenciais sob ótica similar a teoria de Galois em relação as equações polinomiais. Por volta de 1870, o que hoje nomeamos de álgebras de Lie, figurava como objetos infinitesimais referente a grupos de transformações, os quais eram alcançados a partir de soluções de equações diferenciais ordinárias. Posteriormente, outros matemáticos contribuíram com a ampliação, classificação e aplicação dessa álgebra, de modo que, atualmente ela é analisada a partir de duas visões: algébrica e como variedade diferencial (objeto geométrico).

Nesse sentido, do ponto de vista algébrico, considere L um espaço vetorial sobre um corpo K.

Assim, uma álgebra de Lie é um espaço vetorial L, munido por uma operação binária chamada de comutador de Lie $[x, y]$, que aplicado aos elementos da álgebra satisfaz as propriedades abaixo:

- Bilineariedade,
- Alternatividade

$$[x, x] = 0\,, \forall\, x \in L$$

- Identidade de Jacob:

$$[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0\,, \forall\, x, y, z \in L$$

Objetivos

Esse trabalho é uma introdução à álgebra de Lie com enfoque na compreensão dos conceitos necessários para o estudo da Decomposição de Jordan-Chevalley e posteriormente na leitura aprofundada do artigo "Jordan-Chevalley decomposition in Lie algebras". Nesse sentido, buscamos enunciar os conceitos algébricos básicos relativos as estruturas das álgebras de Lie, tais como subálgebras, ideais, morfismos de Lie (homomorfismo, isomorfismo), representações, derivações, séries de composição, álgebras solúveis, álgebras nilpotentes e álgebras semi-simples, a fim de, em consonância com os resultados de álgebra linear (transformação linear, auto-valor, auto-vetor, auto-espaço, subespaço invariante, diagonalização) estudar a decomposição de Jordan-Chevalley, suas possíveis aplicações e potenciais resultados com respeito a álgebra de Lie.

Desenvolvimento

Um dos tópicos inicias a tratarmos acerca das álgebras de Lie figura como:

Definição 1 (Homomorfismo de Lie)**.** Dada uma transformação linear $\phi\colon L \to L'$, com L , L' álgebras de Lie. Dizemos que ϕ é um homomorfismo, se $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$. Um homomorfismo de L em L, é denominado de endomorfismo.

Podemos ainda, estudar as álgebras de Lie a partir de homomorfismos que as representem como subálgebras das transformações lineares sobre o mesmo corpo de escalares.

Definição 2 (Representação)**.** Uma representação consiste de um homomorfismo de álgebra que expressa um objeto algébrico em uma estrutura algébrica conhecida, como espaços vetoriais, transformações lineares endomórficas de espaços vetoriais. Dessa forma, uma questão de uma estrutura algébrica pode ser resolvida como um problema de álgebra linear. Ou seja, seja L uma álgebra de Lie, uma representação de L é um homomorfismo de Lie

$$\rho\colon L \longmapsto \mathrm{gl}\, V$$

em que V é um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathrm{gl}\, V$ a álgebra de Lie das transformações lineares de V.

Observamos que quando $\ker(\rho) = 0$, ρ é uma representação fiel e $L \simeq \operatorname{Im}\rho$, ou seja, a álgebra de Lie pode ser analisada como uma subálgebra das transformações lineares, e no caso em que $\dim L$ é finita, posso representá-la como uma subálgebra de matrizes.

Já a aplicação $ad\colon x \in L \longmapsto \mathrm{ad}\,(x) \in \mathrm{gl}\, L$ é uma representação adjunta de L em L, uma vez que, para cada $x \in L$, temos a transformação linear $\mathrm{ad}\,(x)\colon L \longmapsto L$, em que $\mathrm{ad}\,(x)(y) = [x, y]$. Já o $\ker(\mathrm{ad}\, x) = Z(L) = \{x \in L : \mathrm{ad}\,(x)y = [x, y] = 0\, \forall\, y \in L\}$, com $Z(L)$ como o centro de L.

Dessa forma, a aplicação

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathrm{sl}\,(2, \mathbb{K}) \longmapsto \begin{pmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix} \in \mathrm{gl}\,(3, \mathbb{K})$$

é uma representação adjunta de $\mathrm{sl}\,(2, \mathbb{K})$. Com efeito, tomando a base $\{v_1, v_2, v_3\}$, tal que :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

temos as seguintes constantes de estrutura:

$$[v_2, v_1] = 2v_1 \quad [v_2, v_3] = -2v_3 \quad [v_1, v_3] = v_2$$

Onde $\mathrm{ad}\,(v_1),\ \mathrm{ad}\,(v_2),\ \mathrm{ad}\,(v_3)$ formam uma base de $\mathrm{ad}\,(L)$, tomando $\mathrm{sl}\,(2, \mathbb{K}) = L$, com as mesmas constantes de estrutura.

Definição 3 (Derivação)**.** Seja L uma álgebra de Lie, considere uma aplicação linear D, onde $D(L)$ é o espaço das derivações de L, em que $D\colon L \longrightarrow L$, de tal modo que, $D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]$.

Munidos da identidade de Jacob, podemos mostrar que $\mathrm{ad}\,(x)[y, z] = [\mathrm{ad}\,(x)y, z] + [y, \mathrm{ad}\,(x)z]$, satisfaz a definição acima. Ainda, considerando que o espaço das derivação interna corresponde à imagem da representação adjunta da álgebra de Lie, temos que as representações adjuntas são também derivações internas. Desse modo, se existe $z \in L$, tal que $D = \mathrm{ad}\,(z)$, então D é uma derivação interna de L.

Agora, para estudarmos as álgebras de Lie solúveis, nilpotentes e semi-simples, precisaremos considerar duas séries de ideais. A primeira é

$$L = L^0 \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq L^{(k-1)} \supseteq L^{(k)} \supseteq \cdots$$

chamada de série derivada de L, em que, por indução:

$$L^{(k)} = [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}]$$

Ainda, a série central descendente da álgebra de Lie L,

$$L = L^1 \supseteq L^2 \supseteq L^3 \supseteq \cdots \supseteq L^k \supseteq \cdots$$

é dada, por indução como:

$$L^k = [L, L^{k-1}]$$

Com isso, podemos definir a álgebra de Lie solúvel, nilpotente e semi-simples.

Definição 4 (Álgebra de Lie Solúvel)**.** Uma álgebra de Lie L é solúvel, se $L^{(k)} = 0$, para algum $k \geq 1$.

Um exemplo conveniente é a álgebra das matrizes triangulares superiores.

Definição 5 (Álgebra de Lie Nilpotente)**.** Uma álgebra de Lie L é nilpotente, se $L^k = 0$, para algum $k \geq 1$.

Um exemplo é a álgebra das matrizes estritamente triangulares superiores.

Teorema 6 (Radicais Solúveis)**.** *Seja L uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então, $\exists!\,\mathrm{rad}\, \subset L$ ideal solúvel, contendo todos os ideias solúveis de L. Chamamos esse ideal solúvel especial de radical da álgebra de Lie e denotamos por* $\mathrm{rad}\, L$.

Desse teorema, é imediato concluir que se L é solúvel, então $\mathrm{rad}\,(L) = L$.

Definição 7 (Álgebra de Lie Semi-Simples)**.** Uma álgebra de Lie L é semi-simples se $\mathrm{rad}\,(L) = 0$.

Uma álgebra de Lie L é abeliana, se $\forall\, x$ e $y \in L$, temos $[x, y] = 0$, ou seja, L é comutativa. Com isso, vamos pensar no centro de uma álgebra semi-simples L. Sabemos que

$$Z(L) = \{x \in L : [x, y] = 0,\ \forall y \in L\}$$

é um ideal solúvel. Portanto, o $Z(L) = \mathrm{rad}\,(L) = 0$, além disso, vimos que $Z(L) = \ker \mathrm{ad}\,(L)$, então $\ker \mathrm{ad}\,(L) = 0$ e $\mathrm{ad}\,(L)$ é uma representação fiel. Logo $L \simeq \mathrm{gl}\,(L)$, o que justifica o fato de toda álgebra semi-simples poder ser estudada a partir de transformações lineares.

Em álgebra linear é trabalhado a Decomposição Canônica de Jordan, podemos pensar a Decomposição de Jordan-Chevalley de modo similar, entretanto sob forma mais genérica de suas partes. Como podemos notar no teorema abaixo:

Teorema 8 (Decomposição Jordan-Chevalley)**.** *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre K, e dado $x \in \mathrm{gl}\,(V)$. Existem $x_s, x_n \in \mathrm{gl}\,(V)$ e são únicos satisfazendo as seguintes condições:*

- $x = x_s + x_n$;
- x_s *é semi-simples;*
- x_n *é nilpotente;*
- x_s *e* x_n *comutam.*

A decomposição $x = x_s + x_n$ é chamada de Jordan-Chevalley, onde x_s é parte semi-simples e x_n é parte nilpotente.

Aplicações

Com base nos conceitos levantados e na Decomposição de Jordan-Chevalley, podemos estudar os seguintes resultados,

Teorema 9 (Critério de Cartan)**.** *Seja L uma subálgebra de $\mathrm{gl}\,(V)$, onde V tem dimensão finita. Suponha que $\mathrm{tr}\,(xy) = 0\, \forall\, x \in [L, L],\ y \in L$. Então L é solúvel.*

Teorema 10. *Se $\delta \in \mathrm{Der}\, L$, então existem σ parte semi-simples e ν parte nilpotente tal que $\delta = \sigma + \nu$.*

E ainda trabalharmos sobre o artigo "Jordan-Chevalley decomposition in Lie algebras" (1). Os estudos abordados consideram as álgebras de Lie e representações de dimensão finita, sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica 0 e algebricamente fechado. Até o momento, nos preocupamos com a decomposição de Jordan-Chevalley (JCD) para um dado $x \in L$ e sua representação de Lie, os seguintes estudos ampliarão essa visão, a medida que tratam da JCD de uma dada representação qualquer, sem fixar um elemento de L, ou seja, trabalha com a hipótese que dada a representação $\pi\colon L \longrightarrow \mathrm{gl}\,(V)$ de uma álgebra de Lie L, se $\pi(L)$ contém a parte semi-simples e a parte nilpotente da decomposição de Jordan-Chevalley (JCD) em $\mathrm{gl}\,(V)$ de $\pi(x)\ \forall\ x \in L$. De modo geral, será provado que se S é uma álgebra de Lie de matrizes sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $a \in S$, então os somandos semi-simples e nilpotentes da decomposição de Jordan-Chevalley de a pertencem a S se, e somente se, $\exists\ s,\ n \in S$, s é semi-simples, n é nilpotente (não necessariamente $[s, n] = 0$), tal que $a = s + n$. Para tal, o artigo utiliza uma série de resultados, relacionados a teoria de representação de álgebras de Lie semi-simples, além de visar classificar as distintas classes de representações indecomponíveis de certas famílias de álgebras de Lie não semi-simples e estudar a existência e unicidade de JCD's abstratas em álgebras de Lie arbitrárias.

Agradecimentos

Agradeço a todos os envolvidos na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), ao Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC Jr.) ofertado aos medalhistas da OBMEP, os quais possibilitaram a maximização da minha visão e interesse pelo conhecimento Matemático, além de mediar e proporcionar minha participação no Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME), ainda agradeço ao CNPQ pelo apoio Financeiro recebido durante as atividades do Programa. Por fim, agradeço meu orientador por toda paciência, compreensão e dedicação, me auxiliando, sanando minhas dúvidas e me motivando.

Bibliografia

1. CAGLIERO, L. e SZECHTMAN, F. **Jordan-Chevalley decomposition in Lie algebras**. Disponível em:<https://arxiv.org/abs/1512.09096>. Acesso em: 29 Abr. 2019.
2. ERDMANN, K e WILDON, M. J.**Introduction to Lie Algebras.** London: Springer Undergraduate Mathematics Series, 2007.
3. HUMPHREYS, J. E. **Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.** Amherst: Springer Undergraduate Mathematics Series, 1997.
4. LIMA, E. L. **Álgebra Linear.** Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.
5. SAN MARTIN, L. A. B. **Álgebras de Lie.** Campinas: Unicamp, 2010.
6. YOO, J. H. **The Jordan-Chevalley Decomposition.** 2014. Disponível em: <http://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Yoo.pdf>. Acesso em: 02 Abr.2019.