Classificação das álgebras de Lie de dimensões 1 e 2

Tiago Meireles
Orientadora: Luciana Alves

Universidade Federal de Uberlândia

tiagoab2008@gmail.com

Definição 1. *Uma **álgebra de Lie** é um espaço vetorial $\mathfrak{a}$ munido de uma operação*

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}$$

$$(X, Y) \longmapsto [X, Y]$$

*chamada de **colchete de Lie**, que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) O colchete de Lie é bilinear.
(ii) O colchete de Lie é anti-simétrico, ou seja, $[X, X] = 0$ para qualquer $X \in \mathfrak{a}$.
(iii) A identidade de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

é satisfeita para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{a}$.

Exemplo 1. *O espaço vetorial das matrizes quadradas reais $M(n \times n, \mathbb{R})$ é uma álgebra de Lie com o colchete definido por*

$$[A, B] = AB - BA.$$

Exemplo 2. *Seja $\mathfrak{b}$ um espaço vetorial qualquer e definamos:*

$$[X, Y] = 0 \text{ para quaisquer } X, Y \in \mathfrak{b}. \tag{1}$$

*É imediato verificar que $\mathfrak{b}$, munido deste colchete de Lie, é uma álgebra de Lie. As álgebras de Lie com colchete definido dessa forma recebem o nome de álgebras de Lie **abelianas**.*

Proposição 1. *Numa álgebra de Lie, tem-se que $[X, X] = 0$ para qualquer $X \in \mathfrak{a}$ se, e somente se, $[X, Y] = -[Y, X]$.*

Demonstração 2. *Notemos que:*

$$0 = [X + Y, X + Y] = [X, X + Y] + [Y, X + Y] =$$

$$= [X, X] + [X, Y] + [Y, X] + [Y, Y].$$

Pela hipótese temos que $[X, X] = 0$ para qualquer $X \in \mathfrak{a}$. Assim, pela igualdade acima, temos que $[X, Y] = -[Y, X]$.
Reciprocamente, suponhamos que $[X, Y] = -[Y, X]$. Daí,

$$[X, Y] + [Y, X] = 0 \text{ para qualquer } X, Y \in \mathfrak{a}.$$

Assim, se $Y = X$, temos que $[X, X] + [X, X] = 0$ e concluimos que $[X, X] = 0$.

Definição 2. *Sejam $\mathfrak{a}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{b}$ um subespaço vetorial de $\mathfrak{a}$. Dizemos que $\mathfrak{b}$ é uma **subálgebra** de Lie de $\mathfrak{a}$ se, e somente se, $X, Y \in \mathfrak{b}$ implica em $[X, Y] \in \mathfrak{b}$.*

Assim, toda subálgebra de Lie de uma álgebra de Lie também é uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de uma álgebra de Lie que é uma álgebra abeliana é chamada **subálgebra abeliana.**

Teorema 3. *Seja $\mathfrak{a}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{b}$ um subespaço unidimensional de $\mathfrak{a}$. Então, $\mathfrak{b}$ é uma subálgebra abeliana de $\mathfrak{a}$.*

Demonstração 4. *Seja $\{Z\}$ uma base de $\mathfrak{b}$. Se $X, Y \in \mathfrak{b}$, então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $X = \alpha Z$ e $Y = \beta Z$. Portanto, $[X, Y] = [\alpha Z, \beta Z] = \alpha\beta[Z, Z] = 0 \in \mathfrak{b}$.*

Com este resultado conseguimos então uma caracterização das álgebras de dimensão 1.

Corolário 5. *Toda álgebra de Lie unidemensional é abeliana.*

Demonstração 6. *Seja $\mathfrak{a}$ uma álgebra de Lie unidimensional. Como $\mathfrak{a}$ é um subespaço unidimensional dela mesma, segue da proposição anterior que $\mathfrak{a}$ é abeliana.*

No caso das álgebras de dimensão 2, temos o seguinte resultado.

Teorema 7. *Seja $\mathfrak{a}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{b}$ uma subálgebra de dimensão 2 de $\mathfrak{a}$. Então, ou $\mathfrak{b}$ é abeliana ou existe uma base $\{A, B\}$ de $\mathfrak{b}$ tal que $[A, B] = B$.*

Demonstração 8. *Suponhamos que $\mathfrak{b}$ seja uma subálgebra não abeliana de dimensão 2 e tomemos uma base X, Y de $\mathfrak{b}$. Como $\mathfrak{b}$ é uma subálgebra não abeliana e $X, Y \in \mathfrak{b}$, temos que $[X, Y] \neq 0$. Definamos $Y' = [X, Y]$ e escolhamos $X' \in \mathfrak{b}$ de modo que $\{X', Y'\}$ seja uma base de $\mathfrak{b}$. Como X' e Y' são elementos de $\mathfrak{b}$, temos que $X' = aX + bY, Y' = cX + dY$ e*

$$[X', Y'] = [aX + bY, cX + dY] = (ad - bc)[X, Y] = (ad - bc)Y'.$$

Como $\mathfrak{b}$ não é abeliana, temos que $(ad - bc) \neq 0$. Definamos $A = (ad - bc)^{-1}X'$ e $B = Y'$. A base que estamos procurando é A, B.

Corolário 9. *Seja $\mathfrak{a}$ uma álgebra de Lie de dimensão 2. Então, ou $\mathfrak{a}$ é abeliana ou existe uma base $\{A, B\}$ de $\mathfrak{a}$ tal que $[A, B] = B$.*

Demonstração 10. *Consequência imediata do teorema anterior.*

As álgebras de Lie

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ e } \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

são exemplos concretos de álgebras bidimensionais não-abelianas.

Referências

[1] BARROS, CARLOS JOSÉ BRAGA; SANTANA, ALEXANDRE JOSÉ , *Estruturas Algébricas: com ênfase em elementos da teoria de Lie.*, Maringá-Paraná: Editora da Universidade Estadual de Maringá, 2011.

[2] SAN MARTIN, LUIZ ANTONIO BARRERA, *Álgebras de Lie*, Campinas-São Paulo: Editora da Unicamp, 2010.