CONVEXIDADE EM GRAFOS

Programa de Pós-graduação em Informática(PPGI-UFRJ).

Rômulo Luiz Oliveira da Silva e Vitor dos Santos Ponciano

Orientador: Mitre Costa Dourado (UFRJ)

Navy

Abstract

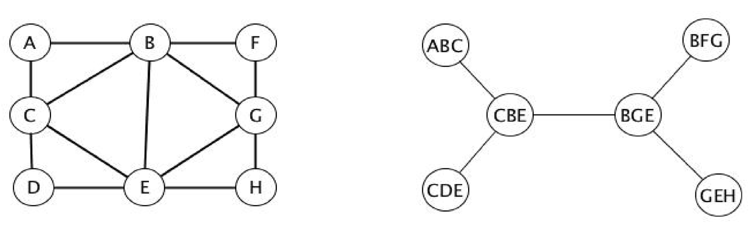
Problems known as NP-hard in graphs, the problem of the clique, the cycle and the hamiltonian path, coloration, isomorphism of graphs among others, have polynomial algorithms for their decision version, including linear ones, restricting themselves to trees. Robertson and Seymour introduced the notion of treewidth of a graph and the relative notion of tree decomposition [5], the amount of similarity between any one graph and one tree. The Courcelle's theorem [1] states that any computational problem that can be defined in LMSO (monadic second order logic) can be solved in graphs, from treewidth bounded by a constant, in linear execution time by an FPT algorithm (Fixed-Parameter Treatable Algorithm). In this work we approached the existence of FPT algorithm for some computational problems related to convexity in graphs of treewidth limited, via Courcelle's theorem.

Introdução

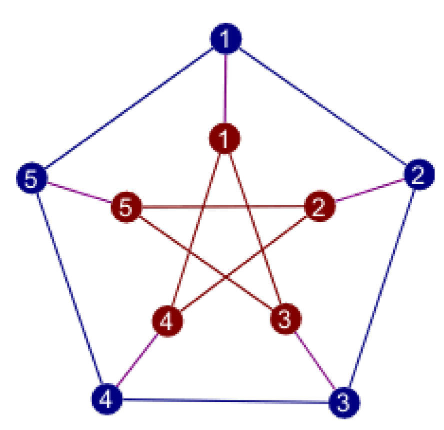
Um grafo G é uma estrutura composta por dois subconjuntos finitos: $V(G)$ é o subconjunto cujos elementos são denominados *vértices*, e $E(G)$ é subconjunto de pares não ordenados de elementos tomados de $V(G)$, os quais são chamados de *arestas*. Uma aresta $e = (u, v) \in E(G)$ é formada pelo par de vértices $u, v \in V(G)$, neste caso u e v são ditos ser vértices *adjacentes*. Dizemos também que e é *aresta incidente* a u e v. Denotamos a *cardinalidade* de $|V(G)| = n$ e $|E(G)| = m$.

A largura em árvore

Problemas conhecidamente NP-difíceis como a dominação em grafos, o problema da clique, do ciclo e do caminho hamiltoniano, coloração, isomorfismo de grafos entre outros, possuem algoritmos polinomiais para sua versão de decisão, inclusive lineares, restringindo-se a árvores. Sendo assim, Robertson e Seymour [5] introduziram um parâmetro inteiro, relacionado a um grafo, cuja finalidade é medir justamente a semelhança desse grafo com uma árvore, esse parâmetro é conhecido como largura em árvore ou treewidth.



EXEMPLO



Modelos

1 O Teorema de Courcelle e Descrição em LMSO de problemas computacionais em grafos

Na decada de 90, Courcelle [1] utilizou tais resultados sobre decomposição em árvore e mostrou que dada uma expressão em LMSO para um problema computacional de decisão, em grafos, e um grafo com largura em árvore limitada, existe um algoritmo FPT que resolve tal problema no grafo dado em tempo de execução linear. Este foi um resultado muito famoso, conhecido como o Teorema de Courcelle.
Um exemplo é a desconexão de um grafo G:

$$disc(E(G)) \equiv \exists X(\exists x(x \in X) \wedge \exists y(y \notin X) \wedge \forall s \forall t(st \in E \Longrightarrow (s \in X \Leftrightarrow t \in X))) \qquad (1)$$

Para todo subconjunto e vértices Y, se X contém tanto um vértice de Y como um vértice fora de Y, então exite uma aresta cujos extremos u, v ambos pertencem a X, mas um deles está em Y e o outro está fora de Y. Os vértices s e t pertencem à mesma componente. Isto é, não existe uma aresta que conecta o elemento y à componente X. Logo o grafo é desconexo com pelo menos duas componentes. A 3 coloração, em grafos, também pode ser escrita em termos de LMSO da seguinte forma:
$3color(E(G)) \equiv \exists X \exists Y \exists Z(part(X, Y, Z) \wedge \forall x \forall y(xy \in E \wedge x \neq y \Longrightarrow \sim (x \in X \wedge y \in X) \wedge$
$\sim (x \in Y \wedge y \in Y) \wedge \sim (x \in Z \wedge y \in Z)))$
onde o predicado $part(X, Y, Z)$ é definido do seguinte modo:
$part(X, Y, Z) \equiv \forall x((x \in X \vee x \in Y \vee x \in Z) \wedge$
$(\sim (x \in X \wedge x \in Y) \wedge \sim (x \in Y \wedge x \in Z) \wedge \sim (x \in X \wedge x \in Z)))$

Motivação e Pesquisas futuras

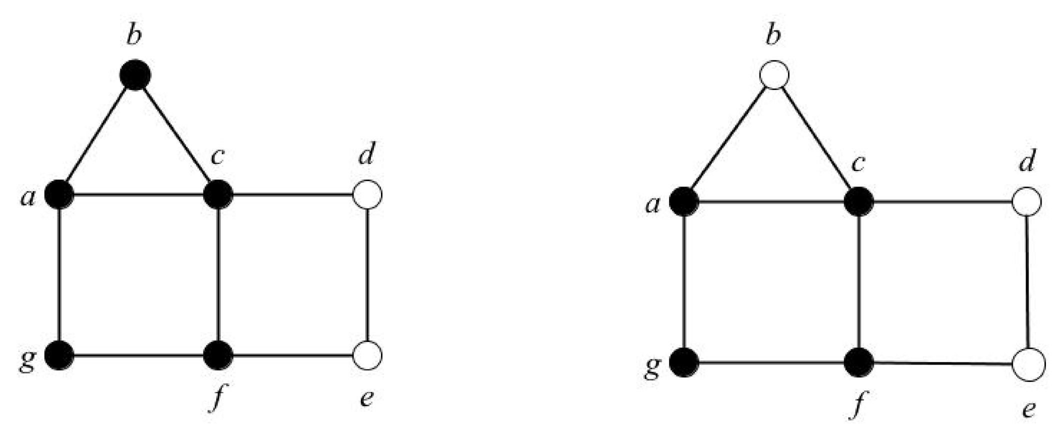
2 Convexidade em grafos

Seja G um grafo e $u, v \in V$, um vértice x é dito ser *uv-gerado* ou simplesmente *gerado* pelo par de vértices $\{u, v\}$, quando x pertencer a algum uv-caminho *considerado pela convexidade em questão*, quando os caminhos considerados forem os caminhos mínimos de um grafo, a convexidade referida é a geodésica [4]. O intervalo $I[u, v]$ dos vértices u e v é o conjunto formado por esses vértices juntamente com todos os vértices que forem uv-gerados. Seja $S \in V$. O intervalo $I[S]$ sobre o subconjunto de vértices S é definido como a união dos intervalos de todos os pares de vértices de S, ou seja. $I[S] = \bigcup_{u,v \in S} I[u, v]$. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é dito convexo, com respeito a uma dada convexidade, quando $I(S) = S$, considerando, aqui, a função intervalo associada à convexidade referida. O problema computacional do número de convexidade de um grafo G [3], pode ser escrito em termos de LMSO, como:

$$\exists S[S \subset V(G) \wedge [\forall z(z \in I(S)) \Longrightarrow (z \in S)] \wedge card(S) \geq r] \qquad (2)$$

O problema computacional do número de envoltória de um grafo G [2], pode ser escrito em LMSO como:

$$\exists S(card(S) \leq r) \wedge [\nexists H(S \subseteq H) \wedge (I(H) \subseteq H) \wedge (H \subset V(G))] \qquad (3)$$



[1] Bruno Courcelle. The monadic second-order logic of graphs. i. recognizable sets of finite graphs. *Information and Computation*, 1990.

[2] Mitre C. Dourado, John G. Gimbel, Jan Kratochvãl, Fábio Protti, and Jayme L. Szwarcfiter. On the computation of the hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, 309(18):5668 – 5674, 2009. Combinatorics 2006, A Meeting in Celebration of Pavol Hellâs 60th Birthday 05/2006.

[3] Mitre C. Dourado, Fábio Protti, Dieter Rautenbach, and Jayme L. Szwarcfiter. On the convexity number of graphs. *Graphs and Combinatorics*, 28(3):333–345, May 2012.

[4] I. M. Pelayo. *Geodesic Convexity in Graphs*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer New York, 2013.

[5] Neil Robertson and P.D Seymour. Graph minors. ii. algorithmic aspects of tree-width. *Journal of Algorithms*, 7(3):309 – 322, 1986.