Teorema de Calderón-Zygmund e aplicações

Raphael Shoji Hoshijima [1]
Orientador: Prof. Tiago Henrique Picon [2]

Universidade Federal de São Carlos [1] Universidade de São Paulo - Ribeirão Preto[2]

raphael.hoshijima@dm.ufscar.br

Introdução

Nesse estudo apresentamos o Teorema de Calderón-Zygmund e uma aplicação sobre a limitação da transformada de Riesz nos espaços de Lebesgue, além de contraexemplos para os casos limite do teorema.

Teorema de Calderón-Zygmund

Teorema 1. *Seja $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ satisfazendo:*

(i) $|\widehat{K}(\xi)| \leq A$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq B$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

Então o operador T definido por $Tf = K * f$ é forte (p,p) para $1 < p < \infty$ e fraco $(1,1)$.

Aplicação

Definição 1. *Definimos as transformadas de Riesz R_j, para $j = 1, \ldots, n$, por*

$$R_j f(x) = c_n \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y)\, dy,$$

para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, no qual

$$c_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}},$$

Como resultado direto Teorema de Calderón-Zygmund, temos que R_j é um operador forte (p,p) para $1 < p < \infty$ e fraco $(1,1)$. De fato, se $K_j(x) = \dfrac{\Omega(x')}{|x|^n}$ com $\Omega_j(x') = c_n \dfrac{x_j}{|x|}$, então $R_j f = K_j * f$. Temos que $K_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ainda,

$$\widehat{K_j}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|} \Longrightarrow \left|\widehat{K_j}(\xi)\right| = \left|\frac{\xi_j}{|\xi|}\right| \leq 1,$$

ou seja, o item (i) do Teorema 1 é satisfeita. Além disso, afirmamos que se

$$|\nabla K(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}},$$

então K satisfaz o item (ii) do teorema. Com efeito, seja $|x| \geq 2|y|$. Pela Desigualdade do Valor Médio, temos

$$\begin{aligned} |K(x-y) - K(x)| &\leq |y| \sup_{z\in[x,x-y]} |\nabla K(z)| \\ &\leq C|y| \left(\sup_{z\in[x,x-y]} \frac{1}{|z|^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

Temos que $|z| \geq \frac{1}{2}|x|$ e então,

$$|K(x-y) - K(x)| \leq C|y|\frac{2^{n+1}}{|x|^{n+1}} = 2^{n+1}C\frac{|y|}{|x|^{n+1}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx &\leq 2^{n+1}C|y| \int_{|x|\geq 2|y|} \frac{1}{|x|^{n+1}}\, dx \\ &= 2^n C |S^{n-1}|, \end{aligned}$$

e K satistaz a hipótese (ii). Calculando as derivadas parciais de K_j, vemo que

$$|\nabla K_j(x)| \leq c_n \frac{n+2}{|x|^{n+1}}$$

e então K_j satisfaz o item (ii) do Teorema 1. Concluímos então que R_j é forte (p,p) para $1 < p < \infty$ e fraco $(1,1)$.

Observação 1. *A transformada de Hilbert definida por*

$$Hf(x) = \pi^{-1} \lim_{t\to 0} \int_{|y|>t} \frac{f(x-y)}{y}\, dy,$$

para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, é um caso particular da transformada de Riesz quando $n = 1$. Portanto, pelo Teorema de Calderón-Zygmund, a transformada de Hilbert também é fraco $(1,1)$ e forte (p,p) para $1 < p < \infty$.

Contraexemplos

No Teorema de Calderón-Zygmund, os casos em que $p = 1$ e $p = \infty$ são falsos. De fato, para $p = \infty$, basta considerar $f = \chi_{[0,1]}$ então

$$Hf(x) = \pi^{-1} \log\left|\frac{x}{x-1}\right|$$

que não é limitada e portanto H não é forte (∞, ∞).

No caso para $p = 1$ enunciaremos o seguinte resultado:

Lema 1. *Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Se $H\phi \in L^1(\mathbb{R})$, então $\widehat{\phi}(0) = 0$.*

Demonstração. Como $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ então $\widehat{\phi}$ é contínua e

$$\widehat{H\phi}(\xi) = -isgn(\xi)\widehat{\phi}(\xi).$$

Pela hipótese $H\phi \in L^1$, então $\widehat{(H\phi)}$ é contínua. Logo, pela expressão anterior $\widehat{H\phi}$ é contínua na origem se, e somente se, $\widehat{\phi}(0) = 0$. □

Se considerarmos $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ temos que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e ainda, $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Como $\widehat{f}(0) = \sqrt{2\pi} \neq 0$, então pelo Lema 1, $Hf \notin L^1(\mathbb{R})$ e portanto H não é forte $(1,1)$.

Referências

[1] Duoandikoetxea, J.; Fourier Analysis, Graduate Studies in Mathematics, Volume 29, AMS, 2001;

[2] Stein, E. M.; Singular Integral and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press, Princeton, 1970.

Agradecimentos

À Capes pelo apoio financeiro.