Uma Introdução ao Cálculo Quântico

Mirelly Nascimento Oliveira

Universidade de Brasília

mirellyno123@gmail.com

Resumo

No cálculo quântico trabalhamos com funções cujo domínio é a seguinte escala temporal

$$q^{\mathbb{N}} = \{q^n : n \in \mathbb{N}\},$$

onde $q > 1$. Neste trabalho apresentaremos as definições para os q-análogos do Cálculo para o Cálculo Quântico, o q-cálculo. Veremos a noção da q-derivada, suas propriedades e semelhanças com a derivada usual, um q-análogo para o binômio. A partir do q-binômio definiremos, por fim, o q-análogo para a fórmula de Taylor.A partir da definição do q-análogo da fórmula de Taylor conseguimos definir as Funções Exponenciais e Trigonométricas estudando a Fórmulas Binomiais de Gauss e de Heine. Por fim, e a fim de estudar as integrais, vemos uma noção da q-Antiderivada.

Objetivo

1. Apresentar um breve introdução ao Cálculo Quântico, mostrando suas principais ferramentas.

Resultados

Utilizando a seguinte definição de q-diferencial

$$d_q = f(qx) - f(x)$$

podemos definir a q-derivada que é dada por

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$$

Exemplo:

$$D_q x_q^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n x^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{(q^n-1)x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{(q-1)} x^{n-1}$$

Denotamos $\frac{q^n-1}{(q-1)}$ por $[n]$, e o chamamos de análogo de n, e então:

$$D_q x_q^n = [n] x_q^{n-1}$$

Temos ainda os q-análogos para as regras do produto, do quociente e da cadeia, respectivamente:

$$\begin{aligned} D_q(f(x)g(x)) &= f(qx)D_q g(x) + g(x) D_q f(x) \\ &= g(qx) D_q f(x) + f(x) D_q g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{g(x)D_q f(x) - f(x) D_q g(x)}{g(x)g(qx)} \\ &= \frac{g(qx)D_q f(x) - f(qx) D_q g(x)}{g(x)g(qx)} \end{aligned}$$

A regra da cadeia só pode ser aplicada quando $f(u(x))$ é tal que $u = u(x) = ax^b$, daí:

$$D_q(f(u(x))) = D_{q^b} f(u(x)) D_q u(x)$$

Para encontrar o q-análogo da Fórmula de Taylor, utilizamos o seguinte teorema:

Teorema: Sejam a um número, D um operador linear no espaço dos polinômios e $P_n(x)$ uma sequência de polinômios satisfazendo três condições:

1. $P_0(a) = 1$ e $P_n(a) = 0$, para todo $n \geq 1$;
2. grau$P_n(x) = n$;
3. $DP_n(x) = P_{n-1}(x)$, para todo $n \geq 1$.

Então para qualquer função $f(x)$ de grau N, temos a seguinte fórmula de Taylor generalizada:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} (D^n f)(a) P_n(x)$$

Agora vamos utilizar o teorema tomando $D = D_q$ e $P_n(x)$ como um q-análogo de $\frac{(x-a)^n}{n!}$.
Para isso vamos definir os q-análogos de $n!$ e $(x-a)^n$:

$$[n]! = \begin{cases} 1, \text{ se } & n = 0, \\ [n][n-1][n-2]...[1], \text{ se } & n \geq 1. \end{cases}$$

e

$$(x-a)_q^n = \begin{cases} 1, \text{ se } & n = 0, \\ (x-a)(x-aq)(x-aq^2)...(x-aq^{n-1}), \text{ se } & n \geq 1. \end{cases}$$

Agora temos um operador linear D_q e uma sequência de polinômios $\frac{(x-a)_q^n}{[n]!}$ que satisfazem as hipóteses do teorema, portanto obtemos o q-análogo da fórmula de Taylor para a Escala Quântica:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} (D_q^j f)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]!}$$

Aplicando a fórmula de Taylor em $f(x) = (x+a)_q^n$ obtemos a seguinte expressão

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=o}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} a^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} x^{n-j}$$

que é chamada de fórmula Binomial de Gauss. Aplicando em $f(x) = \frac{1}{(1-x)_q^n}$ obtemos

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[n][n+1]...[n+j-1]}{[j]!} x^j$$

que é chamada fórmula Binomial de Heine. Fazendo $n \to \infty$ nestas fórmulas podemos definir as funções exponenciais:

$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!} = \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}}$$

e

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{[j]!} = (1+(1-q)x)_q^{\infty}.$$

Calculando as q-derivadas podemos ver que $D_q e_q^x = e_q^x$ e $D_q E_q^x = E_q^{xq}$. Definimos então as funções trigonométricas:

$$sen_q x = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i}, Sen_q x = \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i}$$

$$cos_q x = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2}, Cos_q x = \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2}.$$

Temos por fim que a função $F(x)$ é uma q-Antiderivada de $f(x)$ se $D_q F(x) = f(x)$ e é denotada por $\int f(x) d_q x$. Uma propriedade importante sobre a q-Antiderivada é que ela é única quando a função é contínua em $x = 0$.

Conclusão

Os estudos nessa área são bastante atuais por ser uma teoria recente. O estudo do q-cálculo tem sido importante na descoberta de novos resultados em combinatória, teoria dos números e outros campos da Matemática e também da Física. Esperamos aprofundar as descobertas e os resultados.

Referências

[1] KAC, VICTOR; CHEUNG, POKMAN , *Quantum Calculus , Springer Science & Business Media, 16 de Novembro de 2001*