Bifurcações de Configurações Centrais Planas nos Problemas de Quatro e Cinco Corpos

Michelle G. Santos & Eduardo S.G. Leandro

Universidade Federal de Pernambuco / Departamento de Matemática

michellegonzaga27@hotmail.com, eduardo@dmat.ufpe.br

Resumo

Neste trabalho relacionamos soluções das equações de configurações centrais com os extremos da função potencial restrita ao conjunto de configurações sem colisões cujo momento de inércia assume um valor constante, por meio do teorema dos multiplicadores de Lagrange. Estudamos as bifurcações da família de configurações centrais de quatro corpos na qual três corpos de massas iguais ocupam os vértices de um triângulo equilátero centrado em um corpo de massa arbitrária e as bifurcações de uma configuração central na qual quatro corpos de massas iguais ocupam os vértices de um quadrado centrado num corpo de massa arbitrária. Para quatro corpos encontramos duas famílias de triângulos isósceles que bifurcam da única configuração degenerada. Por fim, para cinco corpos encontramos três famílias de configurações centrais que bifurcam das três possíveis configurações degeneradas. Uma no formato de pipa, um trapézio isósceles e um losango.

Introdução

O problema de N corpos no plano é definido por um sistema de equações diferenciais ordinárias

$$m_j\ddot{q}_j = \nabla_{q_j}U(q) \quad j = 1, 2, ..., N,$$

onde $q_j \in \mathbb{R}^2$ e $U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}$.

Definição 1. Uma configuração de N corpos de massas $m_1, ..., m_N$ é dita central se existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla_{q_j}U(q) + \lambda m_j(q_j - c) = 0 \quad j = 1, 2, ..., N,$$

onde c é o centro de massa da configuração. Usando como coordenadas as distâncias mútuas: $r_{ij} = ||q_i - q_j||$, $1 \le i < j \le N$, a função potencial e o momento de inércia são expressas por

$$U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \qquad I = \frac{1}{2M}\sum_{i<j} m_i m_j r_{ij}^2.$$

Objetivos

1. Estudar bifurcações de uma configuração central na forma de um triângulo equilátero centrado numa massa arbitrária m, ou seja, de uma solução do sistema

$$\begin{cases} m_i m_j(\lambda - r_{ij}^{-3}) + \sigma \frac{\partial F}{\partial r_{ij}^2} = 0 & 1 \le i < j \le 4, \\ I - I_0 = 0, \quad F = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Denotamos por F o determinante de Cayley-Manger associado ao volume do tetraedro formado pelos quatro corpos. Seja

$$z_0 = \left(\frac{3m + \sqrt{3}}{3m + 9}, \frac{m}{27}\left(\frac{\sqrt{3} - 9}{m + 3}\right), \sqrt{3}, \sqrt{3}, 1, \sqrt{3}, 1, 1\right),$$

a solução dos sistema (1).

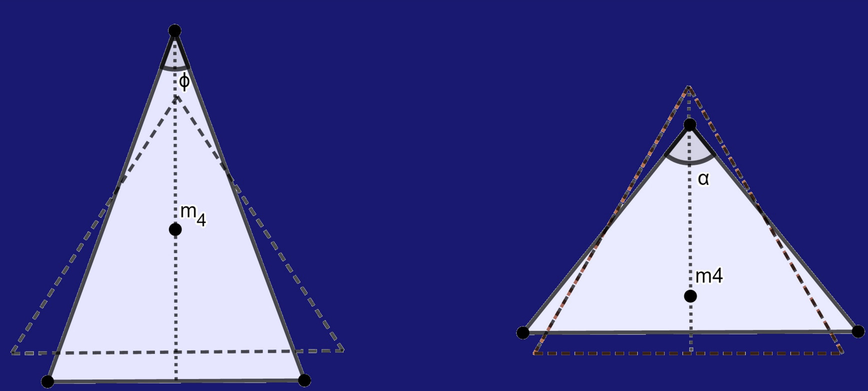

Figura 1 : Configurações que surgem do triângulo centrado na massa m quando $(1)\, m < m_c$ $(2)\, m > m_c$.

2. Estudar bifurcações de uma configuração central na forma de um quadrado centrado numa massa arbitrária m, isto é, de uma solução do sistema de equações

$$\begin{cases} m_i m_j(\lambda - r_{ij}^{-3}) + \sigma_3\frac{\partial F_3}{\partial r_{ij}^2} + \sigma_4\frac{\partial F_4}{\partial r_{ij}^2} + \sigma_5\frac{\partial F_5}{\partial r_{ij}^2} = 0 \; 1 \le i < j \le 5, \\ I - I_0 = 0, \quad F_3 = 0, \quad F_4 = 0, \quad F_5 = 0. \end{cases}$$

Donde F_3, F_4 e F_5 são os determinantes de Cayley-Manger.

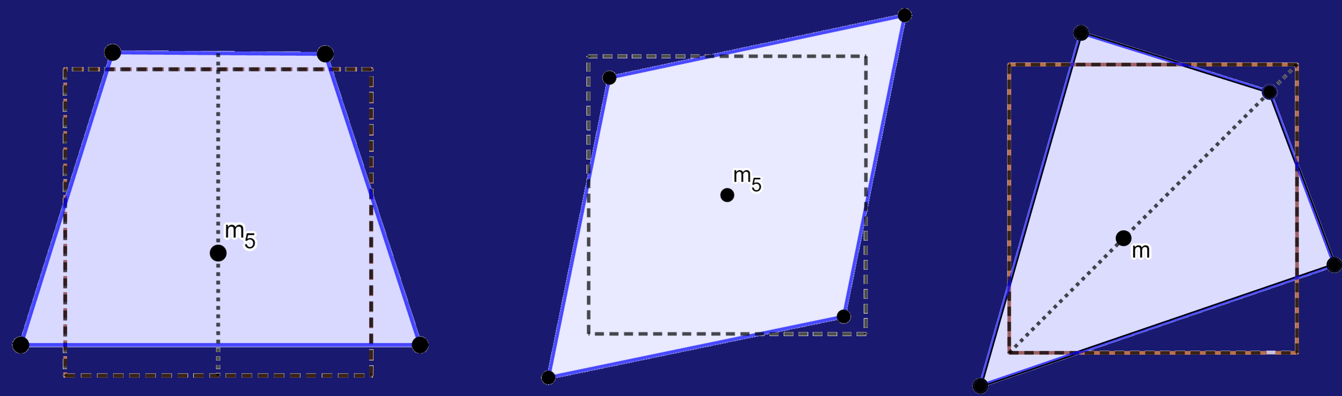

Figura 2 : Configurações que surgem do quadrado centrado.

Resultados (Problema de Quatro Corpos)

Consideramos a função

$$\begin{aligned} W : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^8 &\longrightarrow \mathbb{R}^8 \\ (m, z) &\longmapsto (f_1, ..., f_8) \end{aligned}$$

onde $f_i = 0, i = 1, ..., 8$ são as equações do sistema (1). Verificamos que

$$\left|\frac{\partial W}{\partial z}(z_0)\right| \neq 0 \quad \forall m > 0,$$

exceto para $m_c = \frac{64\sqrt{3}+81}{249}$. Aplicamos o teorema da função implícita na função

$$\begin{aligned} \widetilde{W} = \pi_6 \circ W : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (\alpha, \gamma) &\longmapsto (f_1, ..., f_6) \end{aligned}$$

no ponto (α_0, γ_0), onde $\gamma = (\lambda, \sigma, r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23})$, $\gamma_0 = \left(\frac{3m+\sqrt{3}}{3m+9}, \frac{m}{27}\left(\frac{\sqrt{3}-9}{m+3}\right), \sqrt{3}, \sqrt{3}, 1, \sqrt{3}\right)$, $\alpha = (r_{24}, r_{34}, m)$ e $\alpha_0 = (1, 1, m_c)$. Concluímos que $\widetilde{W}(\alpha, \gamma(\alpha)) = 0$ e $\alpha(\gamma_0) = \alpha_0$. Para que as funções $f_7(z, m)$, $f_8(z, m)$ também se anulem, fazemos $m = m_c + \epsilon$ e $z = z_0 + \epsilon\, b + \epsilon^2\, c + \ldots$, onde $b, c, \ldots \in \mathbb{R}^8$. Definimos $F : (-\eta, \eta) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^8$ tal que $F(\epsilon) = W(m(\epsilon), z(\epsilon))$ e expandimos esta função em série de Taylor

$$F(\epsilon) = W(m_c, z_0) + \epsilon\, F'(0) + \frac{\epsilon^2}{2}F''(0) + O(|\epsilon|^3).$$

Verificamos que o primeiro termo que não se anula é o termo de segunda ordem. Logo o problema se resume em estudar as equações

$$\begin{aligned} (2b_7 + b_8)(b_8 + p) &= 0, \\ (b_7 + 2b_8)(b_7 + p) &= 0, \end{aligned}$$

onde $p = \frac{4531167 - 3089347\sqrt{3}}{18889832}$. As soluções não-triviais destas equações são $b_7 = -p$ e $b_8 = -p$, $b_7 = -p$ e $b_8 = 2p$, $b_7 = 2p$ e $b_8 = -p$. Por fim, aplicamos o teorema da função implícita à função

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\epsilon, (r_{24}, r_{34})) &\longmapsto (\tilde{f}_7, \tilde{f}_8) \end{aligned}$$

onde $\tilde{f}_7 = \frac{f_7(\epsilon, (r_{24}, r_{34}))}{\epsilon^2}$, $\tilde{f}_8 = \frac{f_8(\epsilon, (r_{24}, r_{34}))}{\epsilon^2}$, no ponto $v_0 = (0, (-p, -p))$.

Referências

[1] D. S. Schmidt. Central Configurations and Relative Equilibria for the N-Body Problem. The Recife Lectures / edited by Hildeberto Cabral and Florin Diacu. Princeton University Press, Princeton, NJ, (2002), pp 2-17.

[2] K. R. Meyer. and D. S. Schmidt. Bifurcations of Relative Equilibria in the 4 and 5 Body Problem. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 8, (1988), pp 215-255.

Agradecimentos

CAPES CNPq impa Instituto de Matemática Pura e Aplicada