Uma classe especial de cw-expansividade: cwf-expansividade

Mayara Braz Antunes

Universidade Estadual de Campinas

ra163508@ime.unicamp.br

Resumo

Neste trabalho iremos introduzir o conceito de homeomorfismos continuum-wise fully expansivos ou cwf-expansivos, os quais formam uma classe especial dos homeomorfismos cw-expansivos. No intuito de estudar a dinâmica desses objetos apresentaremos o teorema que garante que a propriedade de mistura (topologicamente mixing) está presente nos mesmos. Além disso, veremos dois exemplos de homeomorfismos cwf-expansivos, dentre eles o tão famoso Solenóide no Toro.

Definições

Estaremos considerando um contínuo como sendo um espaço métrico compacto, conexo e não-degenerado. Se X é um contínuo, o espaço $\{A \subset X \mid A$ é um subcontínuo não-degenerado de $X\}$ com a métrica Hausdorff d_H, isto é,

$$d_H(A,B) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid B \subset U_\varepsilon(A),\ A \subset U_\varepsilon(B)\},$$

onde $U_\varepsilon(A)$ denota a ε-vizinhança de A, é um contínuo conexo por caminhos.

Considere X um espaço métrico compacto com métrica d.

Definição 1. Um homeomorfismo $f : X \to X$ é dito *expansivo* se existe um número $c > 0$ tal que se $x, y \in X$ e $x \neq y$, então existe $N = N(x,y) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$d(f^N(x), f^N(y)) > c.$$

Definição 2. Dizemos que um homeomorfismo $f : X \to X$ é *cw-expansivo* se existe um número $c > 0$ tal que se A é um subcontínuo não-degenerado de X então existe $N = N(A) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\operatorname{diam}(f^N(A)) > c.$$

Definição 3. Dizemos que um homeomorfismo $f : X \to X$ é *cwf-expansivo* se para todo $\varepsilon > 0$ e todo $\delta > 0$ existe um natural $N = N(\varepsilon, \delta) > 0$ tal que se A é um subcontínuo não-degenerado de X com $\operatorname{diam}(A) \geq \delta$ então, uma das duas opções abaixo acontece:

1. $d_H(f^n(A), X) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$;
2. $d_H(f^{-n}(A), X) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$.

Uma aplicação contínua f é *pcwf-expansiva* se para todo $\varepsilon > 0$ e todo $\delta > 0$ existe um natural $N = N(\varepsilon, \delta) > 0$ tal que se A é um subcontínuo não-degenerado de X com $\operatorname{diam}(A) \geq \delta$ então 1. acima ocorre.

Definição 4. Seja $f : X \to X$ uma aplicação contínua. Definimos o *espaço de limite inverso* por:

$$(X, f) = \{\widetilde{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_k \in X,\ f(x_{k+1}) = x_k\}.$$

O conjunto (X, f) é um espaço métrico compacto com a métrica

$$d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d(x_k, y_k)}{2^k},$$

onde $\widetilde{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}, \widetilde{y} = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (X, f)$.

Definição 5. Definimos uma aplicação $\widetilde{f} : (X, f) \to (X, f)$ por

$$\widetilde{f}((x_0, x_1, \ldots)) = (f(x_0), f(x_1), \ldots) = (f(x_0), x_0, x_1, \ldots),$$

onde $(x_0, x_1, \ldots) \in (X, f)$. A aplicação $\widetilde{f}$ é homeomorfismo conhecido por *shift* da f.

Observação: Dizemos que um aplicação f é topologicamente mixing se dados dois abertos U e V não-vazios existe $N = N(U, V) \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$.

Exemplos

Exemplo 1. **(Solenóide)** Considere a aplicação $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(z) = 2z \ (mod\ 1)$. Então o espaço de limite inverso (S^1, f) é o *solenóide* e o shift $\widetilde{f} : (S^1, f) \to (S^1, f)$, $\widetilde{f}((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (f(x_0), x_0, x_1, \ldots)$ é um homeomorfismo expansivo e também pcwf-expansivo (provaremos mais a frente).

É fácil ver que f definida acima é topologicamente mixing, pois dado qualquer aberto U não-vazio de S^1, podemos tomar $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^m U = S^1$, desta forma $f^m(U) = 2^m U \ (mod\ 1) = S^1$ interseccionará qualquer aberto V não-vazio de S^1.

O resultado a seguir garante que $\widetilde{f}$ é topologicamente mixing se, e somente se, f é topologicamente mixing. Por isto e pelo acabamos de ver acima, temos que o solenóide (X, f) tem a propriedade de ser misturador.

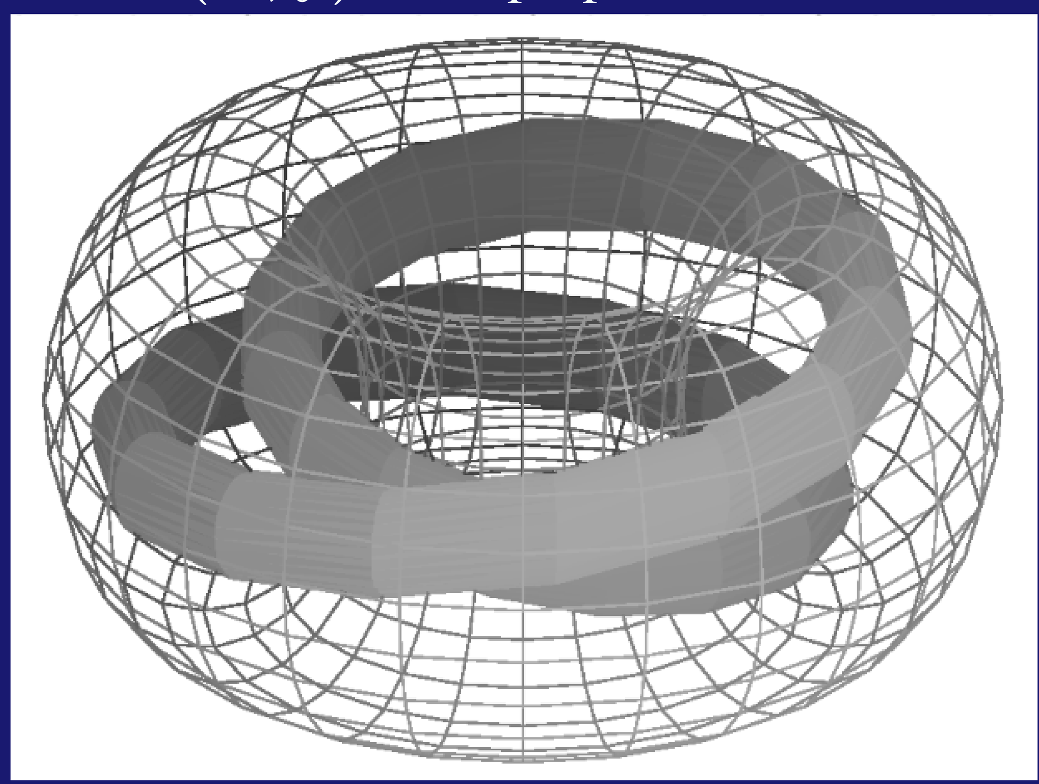

Figura 1: Solenóide - figura retirada de [3].

Exemplo 2. Seja $I = [0, 1]$ o intervalo unitário e seja $f_n : I \to I$ $(n \geq 2)$ a aplicação definida por

$$f_n(t) = \begin{cases} nt - s, & s\ par, \\ -nt + s + 1, & s\ impar, \end{cases}$$

para $t \in \left[\dfrac{s}{n}, s + \dfrac{1}{n}\right]$ e $s = 0, 1, \ldots n-1$. O shift da f_n,

$$\widetilde{f_n} : (I, f_n) \to (I, f_n)$$

é um homeomorfismo pcwf-expansivo, mas não é expansivo.

Resultado

Teorema. Seja $f : S^1 \to S^1$ uma aplicação sobrejetora. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. A aplicação shift $\widetilde{f}$ de f é um homeomorfismo cwf-expansivo.
2. $\widetilde{f}$ é um homeomorfismo pcwf-expansivo.
3. f é uma aplicação pcwf-expansiva.
4. f é topologicamente mixing.
5. $\widetilde{f}$ é topologicamente mixing.

Referências

[1] HISAO KATO , *Continuum-wise expansive homeomorphisms* , Topology and its Applications (1993)

[2] HISAO KATO , *Concerning continuum-wise fully expansive homeomorphisms of continua* , Topology and its Applications (1993)

[3] MICHAEL BRIN GARRET STUCK , *Intoduction to dynamical systems* , Cambridge University Press (2003)

Agradecimentos

Agradeço ao IMECC por todo suporte acadêmico e pela grande oportunidade de estudar neste instituto que me proporciona um crescimento exponencial de minha vida profissional e do desenvolvimento da minha pesquisa e também agradeço a CAPES pela bolsa de doutorado a mim concedida.