Decomposição Primária de Ideais e Decomposição de Variedades

Matheus Manoel Dantas & Cícero Carvalho

Universidade Federal de Uberlândia

matheusmanoel.ch@gmail.com & cicero@ufu.br

Resumo

Primeiramente vamos definir o que é variedade algébrica irredutível e ideal irredutível. Em seguida demonstraremos que todo ideal em $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo, possui decomposição em irredutíveis não necessariamente única. Além disso, toda variedade também possui decomposição em irredutíveis, a qual é única a menos de permutação. Em busca de unicidade para a decomposição de ideais, vamos demonstrar que todo ideal possui uma decomposição primária não redundante que é única. Concluimos o trabalho explorando a relação entre a decomposição primária não redundante de um ideal e a decomposição irredutível de uma variedade.

Introdução

Definição: Um ideal $I \subset R$ é redutível se pode ser escrito como interseção de dois ideais maiores de R. Isto é, $I = J_1 \cap J_2$ tais que $I \subsetneq J_1,\ J_2$. Se I não é redutível, dizemos que I é irredutível.

Seja $V \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ uma variedade algébrica. Se existem $V_1,\ V_2 \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ variedades tais que $V = V_1 \cup V_2$, então dizemos que V é uma variedade redutível. Caso contrário, dizemos que V é irredutível.

Teorema: Se $V \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ é uma variedade algébrica irredutível, então $I(V)$ é irredutível em $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. O inverso também é verdade, se $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ é irredutível, então $V(I)$ é irredutível.

Deste ponto me diante consideramos R um anel noetheriano comutativo com unidade.

Proposição: Todo ideal $I \subset R$ pode ser escrito como $I = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_m$. onde $m \in \mathbb{N}$ e cada I_j é irredutível. Dizemos que a decomposição é fracamente não redundante se nenhum dos I_j pode ser removido, isto é, $I_j \not\supseteq I_1 \cap \cdots \cap I_{j-1} \cap I_{j+1} \cap \cdots \cap I_m$.

Teorema: Seja $V \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ uma variedade. Então podemos escrever $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r$ onde $r \in \mathbb{N}$ e cada V_j é uma variedade irredutível. Se essa escrita é não redundante, então a decomposição é única a menos de permutação. Os V_j com $j \in \{1, \ldots, r\}$ são chamados de componentes irredutíveis de V.

Unicidade

Definição: Um ideal I em um anel R é chamado de primário se, para todos $f, g \in R$ tais que $fg \in I$ vale $f \in I$ ou $g^m \in I$ para algum inteiro positivo m.

Se $Q \subset R$ é um ideal primário, então seu nilradical $\sqrt{Q}$ é um ideal primo, chamado de primo associado a Q. Além disso, todo ideal irredutível I em um anel noetheriano R é primário.

Exemplo: Em $\mathbb{Z}$ é fácil perceber que os ideais primários são $\{0\}$ e $\langle p^m \rangle$ onde $p \in \mathbb{Z}$ é um primo e m um inteiro positivo. Mas nem sempre os ideais primários são potências de primos. De fato, para o ideal $Q = \langle x,\ y^2 \rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$ temos que $\sqrt{Q} = \langle x,\ y \rangle = P$ que é primo. No entanto, $P^2 \neq Q$ e ainda vale $P^2 \subsetneq Q \subsetneq P$. Logo Q não pode ser potência de P.

Teorema da Decomposição Primária: Dado um ideal $I \subset R$ podemos escrever I da forma $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$ onde cada Q_j é um ideal primário. Esta escrita é chamada de decomposição primária de I.

Se nenhum dos Q_j é desnecessário na decomposição de I, dizemos que a decomposição primária é fracamente não redundante. Nessas condições, os ideais primos do conjunto $\{\sqrt{Q_1}, \ldots, \sqrt{Q_r}\}$ são chamados de primos associados de I. Infelizmente nem mesmo essa decomposição é única.

Definição: Seja $I \subset R$ um ideal. Um primo P associado a I é chamado de minimal se não contém nenhum dos outros primos associados de I. Caso contrário, dizemos que P é mergulhado.

Definição: Uma decomposição primária de um ideal é (fortemente) não redundante se é fracamente não redundante e cada um dos primos associados são distintos (em outras palavras, minimais).

Teorema: Seja $I \subset R$ um ideal com decomposição primária não redundante $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$. Se P_j é um primo associado minimal, então existe um elemento $a \in \bigcap_{i \neq j} P_i$ tal que $a \notin P_j$ e

$$Q_j = \bigcup_{m=1}^{\infty} (I : \langle a^m \rangle).$$

Além disso, os primos associados de I são aqueles que podem ser escritos da forma

$$P = \sqrt{I : \langle f \rangle}$$

para algum elemento $f \in R$. Em particular, a decomposição primária não redundante é única.

Conclusão

Finalmente vamos explorar a relação entre as duas decomposições. Seja $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ uma variedade escrita na sua decomposição em irredutíveis. Então, $I(V) = I(V_1) \cap \cdots \cap I(V_r)$ onde cada $I(V_j)$ é um ideal primo e irredutível e, além disso, $I(V_i) \neq I(V_j)$ se $i \neq j$. Em outras palavras, o ideal de cada componente irredutível de V é um primo associado de $I(V)$.

Por outro lado, se $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ é um ideal na sua decomposição primária não redundante, então escrevemos a decomposição irredutível de sua variedade associada $V(I) = V_1 \cup \cdots \cup V_m$ e temos que $I \subset I(V(I)) = I(V_1) \cap \cdots \cap I(V_m)$ onde cada $I(V_j)$ primo e irredutível. Pela unicidade dos primos associados, $m = r$ e cada $I(V_j)$ é um primo associado de I.

Portanto, cada componente irredutível de uma variedade corresponde a um primo associado do seu ideal e vice-versa. Para finalizar, se $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado, temos que $I(V(I)) = \sqrt{I} = \sqrt{Q_1} \cap \cdots \cap \sqrt{Q_r}$, isto é, já temos a decomposição primária de $I(V(I))$.

Exemplo: Seja $I = \langle x^2, xy \rangle \subset \mathbb{R}[x, y]$, vamos determinar as componentes irredutíveis de $V(I)$. Temos que $I = \langle x \rangle \cap \langle x^2,\ y^2 \rangle = Q_1 \cap Q_2$. Temos que Q_1 é um ideal primo e Q_2 é um ideal primário. Os primos associados de I são $P_1 = Q_1$ e $P_2 = \langle x,\ y \rangle$ e, como $P_1 \subsetneq P_2$, o único primo minimal de I é Q_1. Portanto, $V(I) = V(x) = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}.\}$

Referências

[1] Brendan Hassett, *Introduction to Algebraic Geometry*, Cambridge University Press - 2007.

[2] William Fulton , *Algebraic Curves, an Introduction to Algebraic Geometry* , http://www.math.lsa.umich.edu/ wfulton/