O Teorema de Massera para EDO Generalizada

Mateus Fleury

Universidadede Brasília

mateus_fleury@hotmail.com

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Uma relação entre soluções periódicas e limitadas de equações diferenciais ordinárias foi estabelecida inicialmente por Massera em 1950. Desde então, foram apresentadas generalizações desse teorema para outros tipos de equação, como pode ser visto em [?]. Neste trabalho, apresentamos uma outra generalização desse problema, envolvendo equações diferenciais ordinárias generalizadas (EDOGs). Esse tipo de equação usa a integral de Kurzweil em sua definição e é uma generalização das equações diferenciais ordinárias (EDOs).

Introdução

Uma relação entre soluções limitadas e periódicas de EDOs foi estabelecida pela primeira vez em 1950 por Massera. Em seus papéis, ele mostra que a existência de soluções limitadas implica na existência de soluções periódicas quando o sistema satisfaz determinadas condições.

Desde então, outras formulações desse resultado foram apresentadas para diferentes tipos de equações como equações diferenciais em medida (EDMs). Nesse poster, apresentamos outra generalização do Teorema de Massera, envolvendo EDOGs. Tal tipo de equação foi apresentado em XX por Jaroslav Kurzweil e apresenta uma elegante simplicidade em sua generalização para a classe de equações diferenciais e possibilita a modelagem de movimentos com grande oscilação, como o caso do pêndulo de Kapitza.

Objetivos

Estabelecer uma relação entre soluções limitadas e soluções periódicas para EDO Generalizadas lineares.

A integral de Kurzweil

Antes de definir as EDOGs, é necessário definir a integral de Kurzweil.

Definição 1. *Uma função calibre de um intervalo $[a,b]$ é uma função $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$. Podemos ainda considerar uma partição pontilhada $P^* = (P,\xi)$ de $[a,b]$ e a função δ será dita δ-fina quando*

$$[t_{i-1},t_i] \subset (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i)), \text{ para todo } i = 1,2,...,n.$$

Definição 2. *Uma função $U : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é Kurzweil integrável (e será denotada como $U \in \mathcal{K}([a,b])$) se existir $I \in \mathbb{R}^n$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existir uma função calibre δ_ϵ em $[a,b]$ tal que se P é uma partição pontilhada δ_ϵ-fina, então a seguinte desigualdade é verdadeira*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} [U(\tau_i,t_i) - U(\tau_i,t_{i-1})] - I \right\| = \|S(U,P) - I\| < \epsilon,$$

onde I é chamada de integral de Kurzweil e será denotada por $\int_{t_o}^{t} DU(\tau,t)$.

Exemplo 1. *Considere a função de Dirichlet definida como:*

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é racional,} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Então D é Kurzweil integrável em $[0,1]$ mas não é Riemann integrável.

Com a definição da integral de Kurzweil, é possível generalizar uma equação diferencial ordinária.

Definição 3. *Uma função $x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita solução de uma equação diferencial ordinária generalizada*

$$\frac{dx}{dt} = DF(x,s),$$

no intervalo $[a,b]$ se $x(t) \in O = \{x \in \mathbb{R};\ \|x\| < c\}$ para todo $t \in [a,b]$ e seguinte igualdade vale

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} DF(x(\tau),t), \forall t,t_0 \in [a,b],$$

onde a integral acima deve ser entendida como a integral de Kurzweil.

Resultados

Com as definições apresentadas acima, é possível enunciar uma generalização do Teorema de Massera, como feito a seguir.

Teorema 2. *Considere a seguinte EDOG linear*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = \mathrm{D}[A(t)x + g(t)], \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

onde as funções A e g satisfazem as seguintes condições

$A : \mathbb{R} \to L(\mathbb{R}^n)$ é contínua à esquerda e tem variação limitada.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tem variação limitada

Existe uma constante $T > 0$ e $C > 0$ tais que

$$A(t+T) - A(t) = C \text{ and } g(t+T) = g(t) \text{ for every } t \in \mathbb{R}.$$

Então a existência de uma solução limitada de [?] implica na existência de uma solução T-periódica.

Para demonstrar o teorema acima, utilizamos o Teorema do Ponto fixo de Brouwer junto com algumas propriedades da EDOG.

Conclusão

O Teorema de Massera também pode ser estendido para as EDOGs lineares. Tal generalização é interessante pois mostra a existência de soluções periódicas de equações diferenciais que podem depender de funções não necessariamente contínuas.

Referências

[1] M. Bohner, and J. G. Mesquita, *Massera?s theorem in quantum calculus*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 146. No. 11. 2018.

[2] J. Kurzweil, *Generalized Ordinary Differential Equations. Not Absolutely Continuous Solutions*, World Scientific, 2012.

[3] S. Šchwabik, *Generalized Ordinary Differential Equations*, World Scientific, 1992.