

A conjectura de Hadwiger dos conjuntos convexos de dimensão 2 aplicado ao problema de iluminação.

Maria Nathália Barros de Souza & Francisco Tomaz de Santana Neto
Universidade Regional do Cariri- URCA

Resumo

A geometria euclidiana estuda alguns conceitos matemáticos tais como ponto, reta, superfície e sólidos usando alguns axiomas que servem de base para o entendimento. Encontramos na geometria vários problemas em aberto, dos quais destacamos a conjectura de Hadwiger que estabelece que toda figura convexa n -dimensional pode ser completamente coberta por 2^n cópias menores dela mesma. Nesse trabalho, apresentaremos a conjectura de Hadwiger para conjuntos convexos em dimensão 2, resolvido por Friedrich Wilhelm Daniel Levi e aplicado ao problema de iluminação dos sólidos convexos, mostrado por Boltyansky, com o objetivo de maximizar o conhecimento da geometria.

Introdução

Pensando na ideia de que ao desenhar um polígono convexo, ou seja um polígono que quando qualquer segmento de reta que possui extremidades em seu interior está totalmente contido no próprio polígono, e imaginar quantos polígonos homotéticos levemente menores que si mesmo pode cobrir o polígono original, Hadwiger levantou essa questão com a generalização da seguinte conjectura:

“O número mínimo de conjuntos convexos homotéticos menores com os quais é possível cobrir um corpo convexo limitado de dimensão n , que não seja um paralelepípedo n -dimensional, é menor que 2^n ; esse número é igual a 2^n apenas para o caso do paralelepípedo n -dimensional.”

De fato, sua ocorrência mais antiga pode ser rastreada em 1955, onde o matemático alemão Friedrich Wilhelm Daniel Levi que começou a estudar sobre esse assunto e conseguiu determinar o caso para conjuntos convexos limitados bidimensionais. No entanto, a conjectura permanece aberta em dimensões mais altas, exceto em alguns casos especiais.

Objetivo

Mostrar que com apenas 4 figuras homotéticas menores, sendo a quarta necessária apenas para paralelogramos, conseguimos cobrir qualquer conjunto convexo de 2 dimensões.

Resultados

As figuras apresentadas a seguir são alguns exemplos da aplicação da conjectura de Handwiger para o conjunto bidimensional que foram construídas através do software GEOGEBRA, com a finalidade de esclarecer possíveis dúvidas. Vale ressaltar que todas as figuras a seguir que cobrem as originais, a razão da homotetia, como mostra na definição tem de ser menor que 1 e maior que 0.

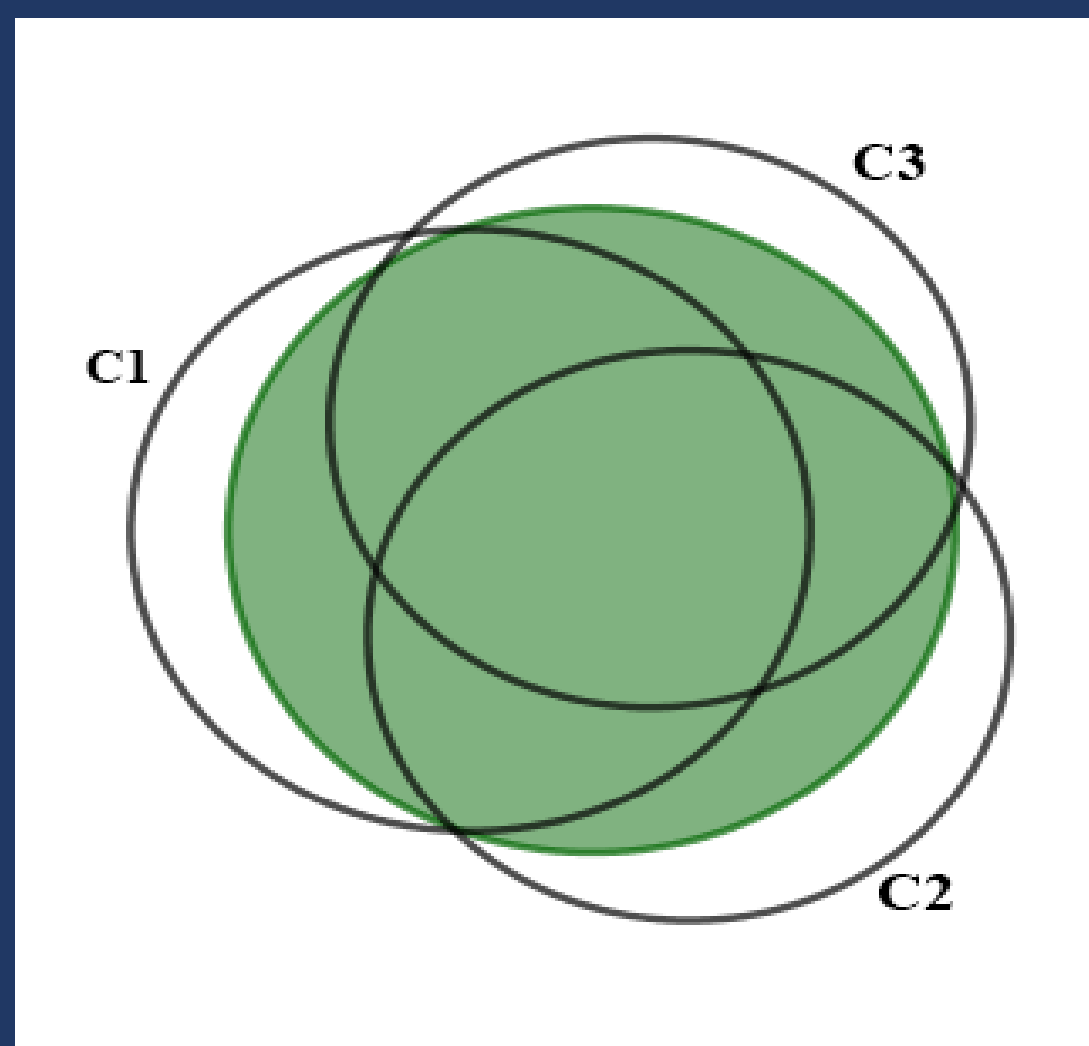


FIGURA 1. CIRCULO

O círculo verde é o círculo original que cobrimos com os círculos C1, C2 e C3. Vale observar que estes círculos têm razões homotéticas menores do que o círculo original. É fácil ver que no caso um círculo maior que o círculo original cobriria ele. Mais para o nosso caso a ideia é utilizar círculos menores do que o original como mostra na definição da conjectura, onde se colocasse apenas dois círculos menores não seria suficiente, sendo necessário 3 círculos homotéticos.



O quadrado azul neon e o paralelogramo vermelho são os originais que cobrimos e cada uma das outras figuras coloridas são cópias menores. Observa-se que se não tivesse o quadrado vermelho e o paralelogramo laranja restando os outros três e movêssemos com a intenção de cobrir os originais não conseguiríamos com apenas estes três figuras homotéticos.

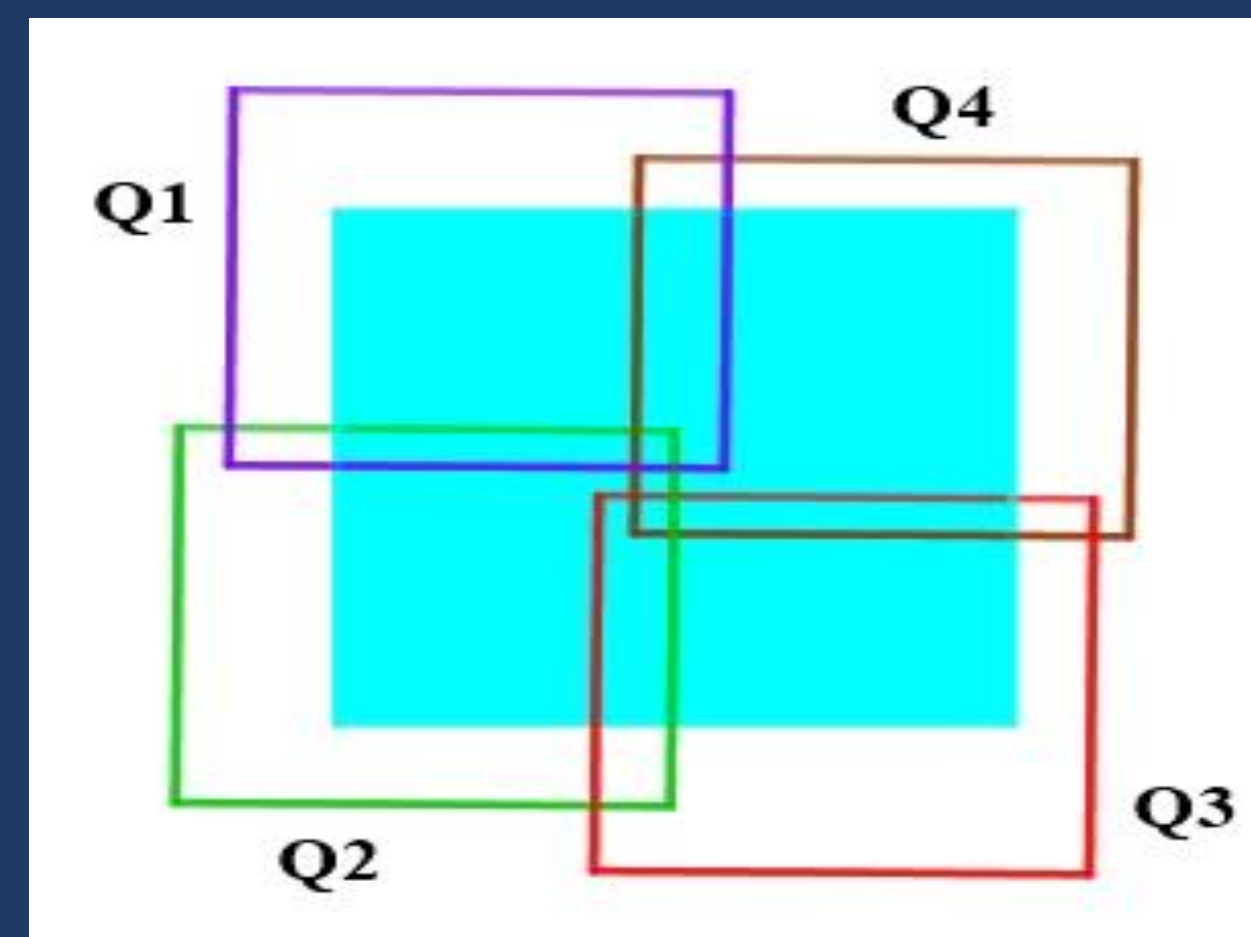


FIGURA 2. QUADRADO

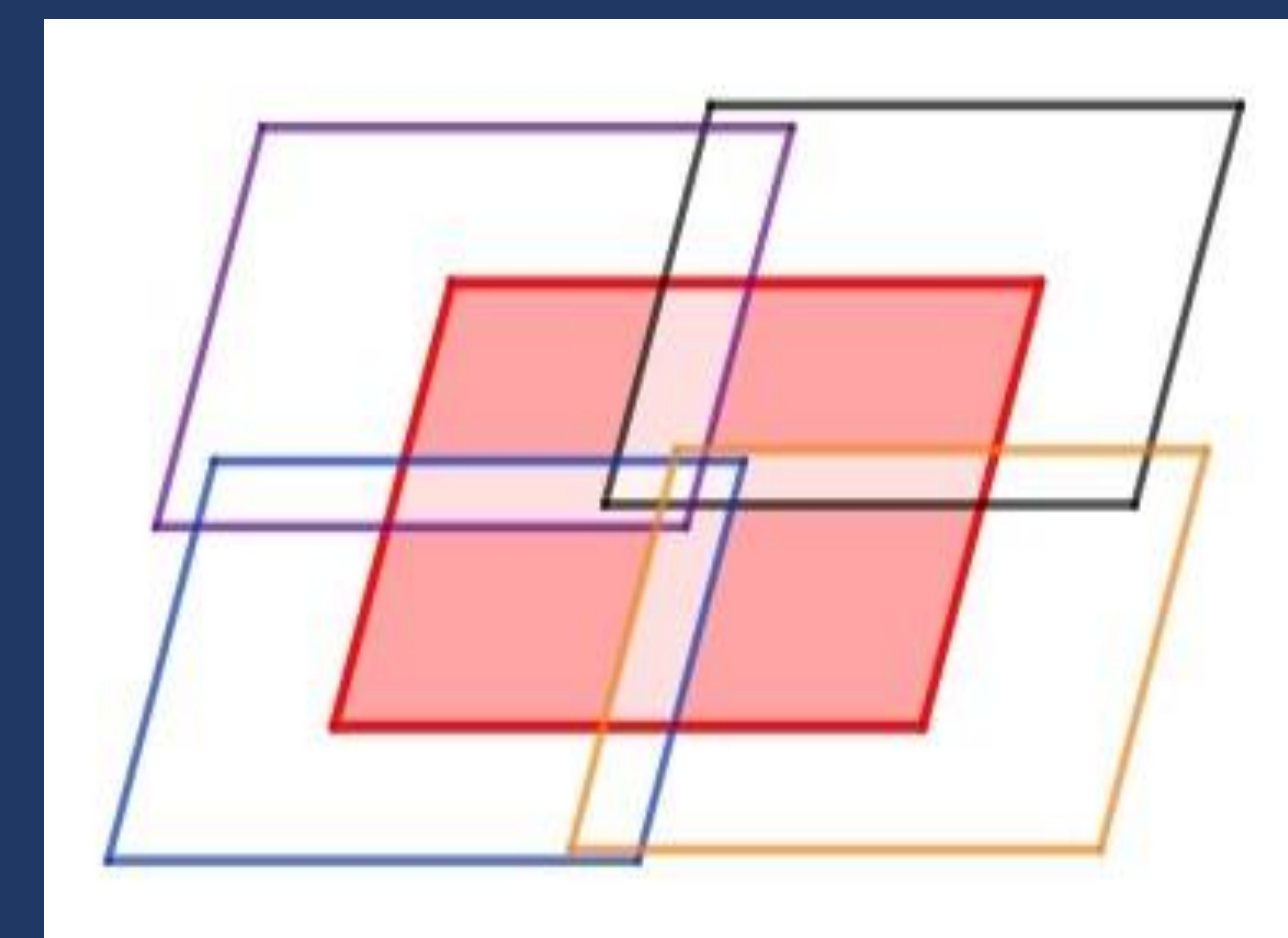


FIGURA 3. PARALELOGRAMO

Isso advém do fato que como os lados dessas figuras menores se mantem paralelos aos lados dos originais, sendo que cada figura homotética menor cobre no máximo um vértice do conjunto original, sendo necessário ter no mínimo um para cobrir cada vértice, totalizando 4 menores.

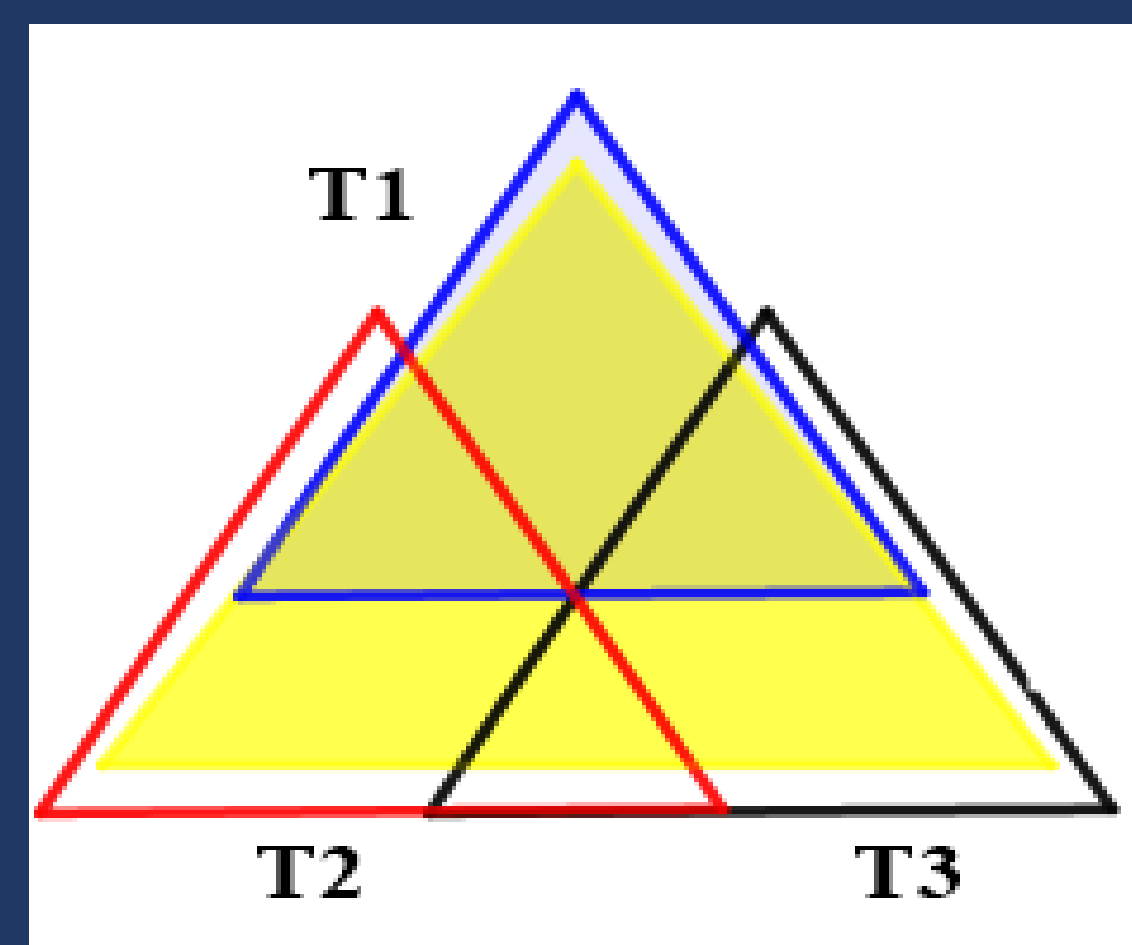


FIGURA 4. TRIÂNGULO

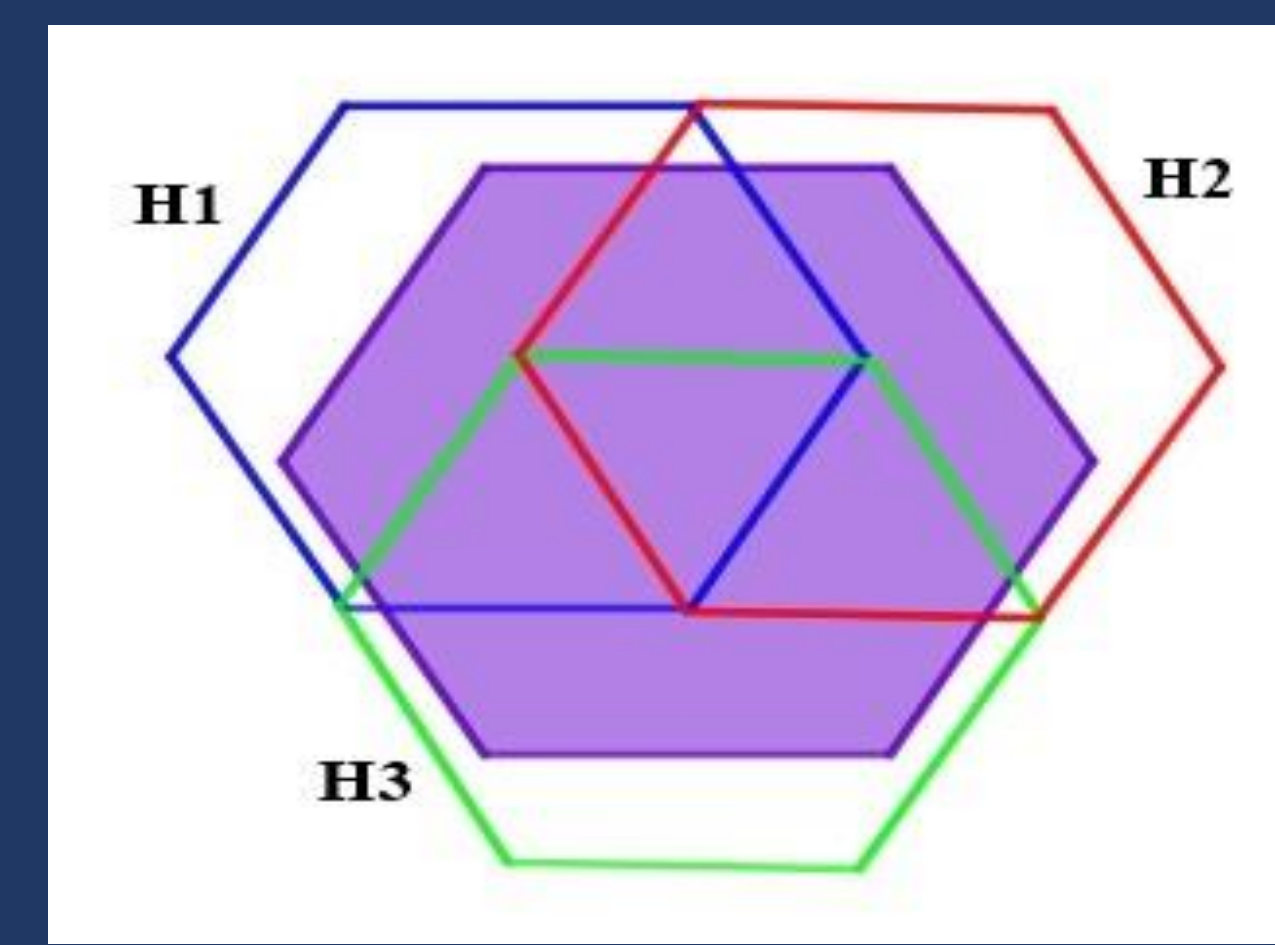


FIGURA 5. HEXÁGONO

Como podemos observar no exemplo acima consegue-se cobrir qualquer conjunto convexo limitado do plano que não seja um paralelogramo com três seus conjuntos homotéticos mais pequenos.

Conclusão

Concluimos que essa conjectura é equivalente ao problema de iluminação mostrado por Boltyansky que consiste em determinar quantas lâmpadas são necessárias para iluminar a superfície de um sólido convexo, e que embora as faces de um cubo possam ser iluminadas por apenas dois refletores, os planos tangentes aos seus vértices e bordas fazem com que ele precise de mais luzes para que ele seja totalmente iluminado sendo usadas as 4 lâmpadas, se somente se, o conjunto convexo for um paralelogramo para iluminá-lo totalmente e isso acaba por ser igual ao número de cópias menores do corpo necessárias para encobri-lo.

Referências

- Boltjansky, V.; Gohberg, Israel (1985), "11. Hadwiger's Conjecture", Results and Problems in Combinatorial Geometry, Cambridge University Press, pp. 44–46.
- HADWIGER, Hugo, Ungeloste Probleme Nr. 20, Elem. der Math. 12 (1957), 121.
- K. Bezdek, Hadwiger–Levi’s covering problem revisited, in New Trends in Discrete and Computational Geometry, J. Pach (Ed.), Springer, New York, 1993.

Agradecimentos

Agradecemos a Urca pelo apoio financeiro e o incentivo, ao impa pela oportunidade e a um dos estudantes do Instituto, Álvaro Almeida Gomez por nos orientar e encorajar na pesquisa.