Geometria Intrínseca das Superfícies

Mareielson Dias Oliveira & Romildo Da Silva Pina

Universidade Federal De Goiás - UFG
Instituto de Matemática e Estatística
marielsond@outlook.com & romildo@ufg.br

Resumo

Dentre os estudos introdutórios de Geometria Diferencial é comumente utilizado o R^3 como espaço ambiente, isto é, tomamos o R^3 como um sistema referencial, e definimos uma superfície regular S como um subconjunto de R^3 satisfazendo certas propriedades. Para o estudo das propriedades locais em cada ponto p∈S utilizamos o produto interno induzido do espaço ambiente R^3. Mesmo S estando mergulhada em R^3, a Curvatura Gaussiana e as geodésicas de S ficam dependendo apenas da primeira forma quadrática, ou seja, são resultados intrínsecos da superfície. A fim de não depender de R^3 e consequentemente não depender de um espaço ambiente fixo, definimos as Superfícies Abstratas, possibilitando o estudo sobre conceitos de Geometria Diferencial sem a necessidade de um espaço ambiente, consequentemente possibilitando também o estudo de geometrias não-euclidianas. Dentre algumas definições que colaboram para tal estudo, destacam-se vetor tangente em S, o que possibilitou introduzir novos conceitos. Neste trabalho estudamos o Teorema Egregium de Gauss, o Teorema de Hopf Rinow e superfícies completas. Tais resultados foram utilizados para estudar superfícies abstratas completas com Curvatura Gaussiana negativa.

Introdução

Definição 1. *Uma superfície abstrata (Variedade Diferenciável de dimensão 2) é um conjunto S munido de uma família de aplicações bijetivas $x_\alpha : U_\alpha \to S$ de conjuntos aberto $U_\alpha \subset R^2$ em S tal que*

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = S$
2. *Para cada par α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, temos que $x_\alpha^{-1}(W), x_\beta^{-1}(W)$ são conjuntos abertos em R^2, e $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha, x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ são aplicações diferenciáveis.*

Definição 2. *Uma superfície geométrica (Variedade Riemanniana de dimensão 2) é uma superfície abstrata S munida de uma escolha de um produto interno $\langle , \rangle_p$ em cada T_pS, p∈S, que varia diferencialmente com p no seguinte sentido. Para alguma(logo, para todas) parametrizações $x_\alpha : U_\alpha \to S$ em torno de p, as funções* $E(u,v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle, F(u,v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle, G(u,v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$ *são funções diferenciáveis em U. (Onde $\langle , \rangle$ Também chamado de métrica Riemanniana em S).*

Teorema Egregium de Gauss. *A curvatura gaussiana só depende da primeira forma quadrática.*

Proposição. *Seja x uma parametrização ortogonal, isto é, $F = 0$, então*

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}$$

Exemplo

Seja um Plano, definiremos uma nova métrica $\langle , \rangle^*$ donde
$\langle , \rangle^* = \frac{1}{\phi^2}\langle , \rangle$ sendo $\langle , \rangle$ a métrica usual de R^2 e $\phi^2 = e^{-2(u^2+v^2)}$.
Utilizando a métrica usual de R^2 temos como resultados que os coeficientes da primeira forma quadrática são:

$$E = G = 1 \text{ e } F = 0$$

donde é fácil ver $K = 0$ com a métrica usual.
Por outro lado em termos da nova métrica $\langle , \rangle^*$ obtemos

$$\overline{E} = \overline{G} = \frac{1}{\phi^2} E \text{ e } \overline{F} = \frac{1}{\phi^2} F = 0$$

logo realizando os cálculos de K obtemos: $K = \frac{-4}{e^{2(u^2+v^2)}}$

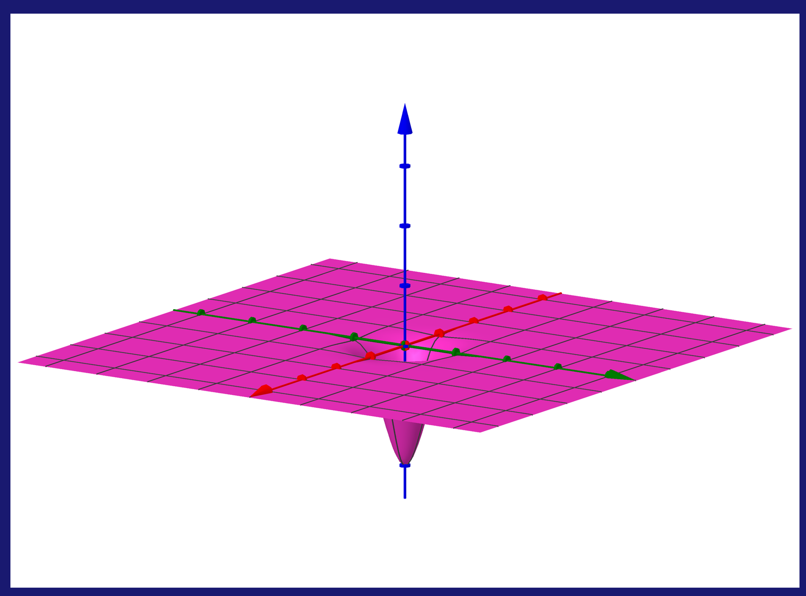

Figura 1: Função da nova Curvatura Gaussiana

Definição 3. *Uma curva parametrizada, não constante, $\gamma : I \to S$ é chamada geodésica em t $\in I$ se o campo de vetores tangentes $\gamma'(t)$ é paralelo ao longo de γ, isto é, $\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0$ γ é uma geodésica parametrizada se é geodésica para todo t $\in I$.*

Proposição. *Seja $\gamma : I \to S$ uma curva parametrizada de S e seja $x(u,v)$ uma parametrização de S em torno de $\gamma(t_0)$ onde $t_0 \in I$. $\gamma'(t)$ ser paralelo é equivalente ao sistema de equações diferenciais:*

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 = 0 \end{cases}$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel da superfície S.
Buscando as Geodésica do exemplo acima chegamos ao seguinte sistema de EDO não linear:

$$\begin{cases} u'' + 2u(u')^2 + 4vu'v' - 2u(v')^2 = 0 \\ v'' - 2v(u')^2 + 4vu'v' + 2u(v')^2 = 0 \end{cases}$$

Definição 4. *Uma superfície regular conexa S é denominada completa quando para qualquer ponto $p \in S$, qualquer geodésica parametrizada $\gamma : [0, \epsilon) \to S$ de S começando em $p = \gamma(0)$, pode ser estendida em uma geodésica parametrizada $\overline{\gamma} : R \to S$, definida sobre toda reta real R.*

Exemplos:

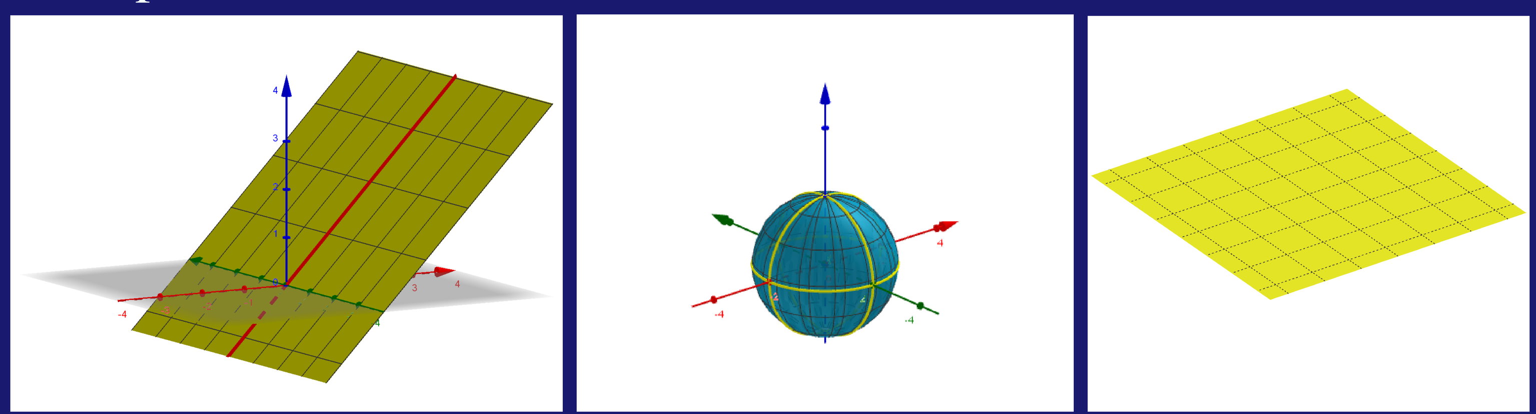

Figura 2: a) Plano: (R^2 , $\langle , \rangle$) b) Esfera: (S^2 , $\langle , \rangle$), c) Plano: (R^2, $\langle , \rangle *$)

Teorema Hopf-Rinow. *Seja S uma superfície completa. Dados dois pontos $p, q \in S$ existe uma geodésica minimizante ligando p a q.*

Conclusão

Neste trabalho concluímos que, ao trabalhar com superfícies abstratas, isso nos possibilita alterar completamente a geometria envolvida, inclusive a Curvatura Gaussiana e também em suas Geodésicas. Isso nos possibilita um estudo totalmente diferente nessa superfície, podendo obter por exemplo no plano uma métrica completa com curvatura gaussiana negativa.

Referências

[1] Carmo, Manfredo Perdigão do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, SBM, 6ª edição, 2014.*

[2] Tenenblat, Keti. *Introdução á Geometria Diferencial, BLUCHER, 2ª edição, 2008.*

[3] Pina, R. ,Tenenblat, K., On the Ricci and Einstein equations on the pseudo- Euclidean and hyperbolic spaces, Differential Geometry and its Applications Vol. 24 101- 107, 2006.