Classificação das Variedades Unitárias de Crescimento Assintótico n^4

Maralice Assis de Oliveira

Orientadora: Ana Cristina Vieira

Universidade Federal de Minas Gerais

maraliceassisoliveira@gmail.com

CAPES

UFMG

Introdução

A PI-teoria clássica estuda F-álgebras que satisfazem algum polinômio não nulo da álgebra associativa livre unitária $F\langle X\rangle$, onde F é um corpo e $X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ é um conjunto enumerável de variáveis não comutativas. Tais estruturas são conhecidas como PI-álgebras. Por exemplo:

$$UT_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b, c \in F \right\}$$

que satisfaz o polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ e a álgebra de Grassmann

$$\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \dots, e_k, \dots | e_i e_j = -e_j e_i \rangle$$

que satisfaz o polinômio $[x_1, x_2, x_3]$.

Nesse trabalho consideraremos somente álgebras associativas sobre um corpo de característica zero.

- Seja A uma F-álgebra. Denotamos por $V = var(A)$ a classe das F-álgebras que satisfazem todas as identidades de A. Dizemos que V é variedade gerada por A e consideramos que $Id(V) = Id(A)$ é o conjunto formado por todas as identidades de A. Uma variedade é dita unitária quando é gerada por uma álgebra unitária.
- Duas PI-álgebras A e B são **PI-equivalentes** se $Id(A) = Id(B)$.
- Em 1987, Kemer mostrou que **$Id(A)$ é finitamente gerado**, como T-ideal, por polinômios multilineares.
- Em 1972, Regev definiu a **sequência de codimensões** de uma álgebra A

$$c_n(A) = dim_F \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}, \; n \geq 1$$

e mostrou que se A é uma PI-álgebra, então essa sequência é **limitada exponencialmente**.

- Em 1979, Kemer provou que se $V = var(A)$, então V tem **crescimento polinomial** das codimensões, ou seja, existem constantes $a, t > 0$ tais que $c_n(V) = c_n(A) \leq an^t$, para todo $n \geq 1$, se, e somente se, $\mathcal{G}, UT_2 \notin V$.
- Em [2], Giambruno, La Mattina e Petrogradsky classificaram todas as álgebras unitárias de crescimento no máximo cúbico .
- Nosso objetivo é apresentar a classificação das variedades unitárias de crescimento assintótico n^4.

Classificação

A partir daqui estaremos considerando A uma álgebra unitária.

Se A é uma PI-álgebra sobre F, então **$Id(A)$ é gerado por polinômios próprios multilineares**.

Definamos a **sequência de codimensões próprias** de A

$$c_n^p(A) = dim_F \frac{\Gamma_n}{\Gamma_n \cap Id(A)}, \; n \geq 2.$$

Teorema. *(Drensky, Regev, 1996) Uma PI-álgebra A gera uma variedade de crescimento polinomial n^k se, e somente se,*

$$c_n(A) = 1 + \sum_{i=2}^{k} \binom{n}{i} c_i^p(A), \; para \; n \geq 1.$$

Consideremos $\chi_n^p(V)$ o S_n-caracter do S_n-módulo $\dfrac{\Gamma_n}{\Gamma_n \cap Id(V)}$.

Teorema. *Sejam U e V variedades unitárias de crescimento n^k, com $k \leq 4$. Tem- se que $\chi_l^p(V) = \chi_l^p(U) \; \forall \; l \leq k$ se, e somente se, $Id(V) = Id(U)$.*

Considere as seguintes álgebras unitárias:

$$N_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & e & f \\ 0 & 0 & a & e \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a, b, c, d, e, f \in F \right\},$$

$$\mathcal{G}_4 = \langle 1, e_1, e_2, e_3, e_4 | \; e_i e_j = -e_j e_i \rangle,$$

$$N_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & f & g & h \\ 0 & 0 & a & f & g \\ 0 & 0 & 0 & a & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a, b, c, d, e, f, g, h \in F \right\},$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & d & e & f \\ 0 & a & c & g & h \\ 0 & 0 & a & c & i \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a, b, c, d, e, f, g, h, i \in F \right\},$$

e K a álgebra unitária que gera a variedade determinada pelo ideal $I = \langle [x_2, x_1, x_1, x_1], [x_1, x_2]^2, St_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \rangle_T$.

Teorema. *A variedade $V = var(A)$ é unitária de crescimento assintótico n^4 se, e somente se, A é PI-equivalente a alguma das seguintes álgebras: $\mathcal{G}_4$, N_5, M, K, $\mathcal{G}_4 \oplus N_4$, $\mathcal{G}_4 \oplus M$, $N_5 \oplus M$, $\mathcal{G}_4 \oplus K$, $N_5 \oplus K$, $K \oplus M$, $N_5 \oplus K$, $N_5 \oplus M \oplus \mathcal{G}_4$, $K \oplus M \oplus \mathcal{G}_4$, $N_5 \oplus K \oplus \mathcal{G}_4$, $N_5 \oplus M \oplus K$, $N_5 \oplus M \oplus K \oplus \mathcal{G}_4$.*

Trabalhos Futuros

Uma variedade V é dita **minimal** de crescimento polinomial n^k se $c_n(V) \approx qn^k$, $k \geq 1$ e $q > 0$, e para qualquer subvariedade própria, $U \subset V$, temos que $c_n(U) \approx q'n^t$ com $t < k$, para algum q'. As álgebras N_4, $\mathcal{G}_4$, N_5, M, K geram variedades minimais de crescimento polinomial $\leq n^4$ ([4] e [3]). Essa observação e a classificação que obtivemos nos motivaram conjecturar que uma álgebra unitária qualquer de crescimento polinomial n^k pode ser escrita como soma direta de álgebras unitárias que geram variedades minimais de crescimento $\leq n^k$. Acreditamos também que esta é a chave para obtermos a classificação geral das variedades unitárias de crescimento polinomial n^k, com $k \geq 5$.

Referências

[1] V. Drensky. *Free Algebras and PI-Algebras.* Springer-Verlag Singapore, 2000.

[2] A. Giambruno, D. La Mattina. and V. M. Petrogradsky. *Matrix algebras of polynomial codimension growth.* Israel Journal of Mathematics **158** (2007) 367-378.

[3] A. Giambruno, D. La Mattina and M. Zaicev. *Classifying the Minimal Varieties of Polynomial Growth.* Canad. J. Math. **66** (2014) 625-640.

[4] D. La Mattina. *Varieties of almost polynomial growth: classifying their subvarieties.* Manuscripta Math. **123** (2007) 185-203.