O sistema I¹: da Dedução Axiomática à Teoria da Prova

Luiz Henrique da Cruz Silvestrini; Elias Oliveira Vieira dos Santos
Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru

RESUMO: O cálculo I^1 foi introduzido por Sette e Carnielli (1995). Este sistema possui um caráter intuicionista, no mesmo sentido do sistema lógico desenvolvido por Arend Heyting (1898-1980), o qual surgiu como a lógica subjacente a Matemática Intuicionista, ou construtivista, por exemplo, $\neg\neg A \rightarrow A$ não é uma tautologia em I^1. Ademais, o cálculo I^1 é uma lógica trivalorada que, ao contrário da lógica clássica, não admite apenas dois valores de verdade, mas sim três, estes são T, F* e F. Os valores T e F denotam, respectivamente, verdade e falsidade, enquanto que F* pode ser interpretado como "falsidade por falta de evidência positiva". No ambiente semântico dessa lógica, há apenas um valor distinguido. O objetivo de nosso trabalho foi desenvolver um método dedutivo alternativo ao axiomático para o sistema I^1, ou seja, introduzimos um sistema de tableaux analíticos para tal lógica. Estabelecemos, por meio de teoremas, que toda dedução obtida do sistema axiomático também será deduzida pelo sistema de tableaux proposto.

Sintaxe da Lógica I¹

A lógica I^1, de caráter intuicionista e trivalente apresentada por Sette e Carnielli (1995), pode ser caracterizada pela *Modus Ponens* ($A, A \rightarrow B \vdash B$) e os seguintes axiomas:

I^1 - 1 $\quad A \rightarrow (B \rightarrow A)$

I^1 - 2 $\quad (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

I^1 - 3 $\quad (\neg\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A)$

I^1 - 4 $\quad \neg\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Semântica da Lógica I1

Carnielli e Lima-Marques (1999) introduziram a semântica da lógica I^1, provando sua corretude e completude com o sistema axiomático, definindo a expressão matricial desta lógica do seguinte modo:

$$I^1 = (\{1, ½, 0\}, \rightarrow, \neg, \{1\})$$

Tableaux analíticos como alternativa ao sistema axiomático

O método dos tableaux analíticos é um método de prova baseado em refutação que permite verificar se uma determinada fórmula é ou não um teorema de uma teoria, introduzido por Raymond M. Smullyan (1968).

Smullyan (1968) apresentou o método de tableaux analíticos para o cálculo proposicional clássico, o qual define um tableau analítico por meio do uso das árvores ordenadas diádicas. A partir de tal método, desenvolvemos um sistema de tableaux para a lógica I^1, o qual denotamos por TI1, estabelecemos as regras de expansão, cláusulas de fechamento e provamos a equivalência dedutiva entre TI1 e I^1, através das demonstrações dos teoremas de Corretude e Completude dedutiva.

Regras de Expansão TI1

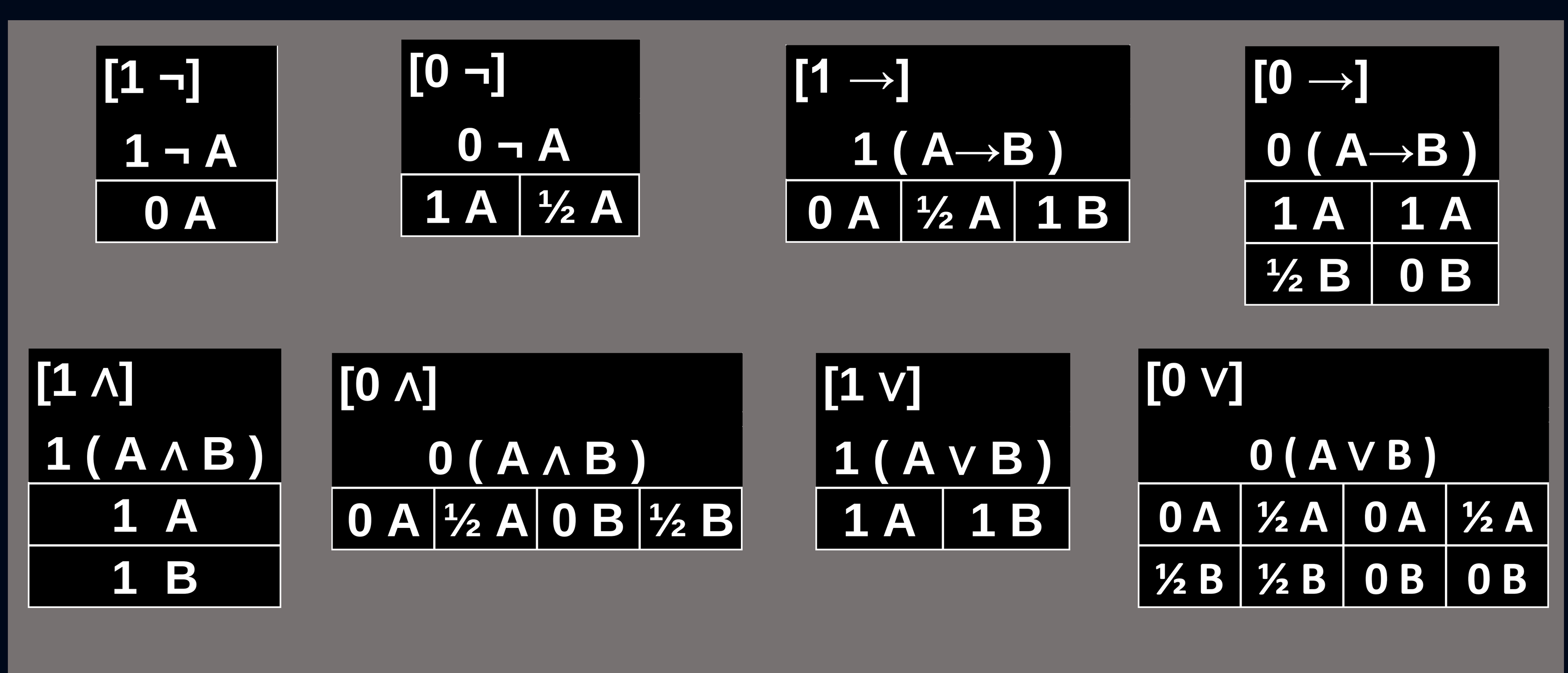

Figura 1: Regras de Expansão TI1

Cláusulas de Fechamento TI1

Temos um ramo no sistema TI1 fechado quando uma mesma fórmula λ possui valores distintos neste mesmo ramo, ou seja, quando uma das três seguintes situações ocorrer:

(i) $1\,\lambda$ e $½\,\lambda$;

(ii) $1\,\lambda$ e $0\,\lambda$ (cláusula clássica);

(iii) $½\,\lambda$ e $0\,\lambda$.

Ou ainda, quando ocorrer o seguinte caso:

(iv) encontramos uma fórmula α, sendo α uma proposição composta formada pelos conectivos $\neg$, $\longrightarrow$, $\wedge$ ou $\vee$, com valor ½.

Equivalência Dedutiva entre TI1 e I¹

Após o estabelecimento das cláusulas de fechamento e das regras de expansão do nosso sistema TI1, o objetivo central de nossa pesquisa foi demonstrar a equivalência entre o sistema axiomático I^1 e o sistema de tableaux TI1. Esta tarefa foi contemplada por meio da demonstração dos seguintes teoremas:

[**Teorema da Corretude**]

Se $\Delta \vdash \varphi$, então $\Delta \Vdash \varphi$

[**Teorema da Completude**]

Se $\Delta \Vdash \varphi$, então $\Delta \vDash \varphi$

Em que: $\Delta \Vdash \varphi$ denota que a fórmula φ é consequência analítica de um conjunto Δ de fórmulas, deduzidas em nosso TI1. No sistema axiomático da lógica I^1, denotamos φ uma consequência lógica (sintática) de Δ, por $\Delta \vdash \varphi$, e, φ uma consequência semântica de Δ, por $\Delta \vDash \varphi$. A equivalência de $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi$ já foi apresentada por Sette e Carnielli (1995).

Deste modo, demonstramos que toda dedução obtida na lógica I^1 também é deduzida em nosso sistema TI1 e vice-versa.

Considerações Finais

O fato de nosso sistema TI1 se apresentar como uma árvore ordenada quadriádica torna este sistema mais aplicável do ponto de vista computacional, por ser um método, por vezes, mais prático e rápido, pois constitui-se num sistema de prova automática de teoremas, enquanto que em I^1 falta localidade quando da escolha de axiomas e suas respectivas instâncias ao se construir uma dedução.

Agradecimentos

Agradecemos à Pró-Reitoria de Pesquisa (PROPe) da Unesp e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo fomento a esta pesquisa.

Bibliografia

CARNIELLI, W. A., LIMA-MARQUES, M. Society semantics for multiple-valued logics. In W.A. Carnielli and I.M.L. D'Ottaviano, editors, **Advances in Contemporary Logic and Computer Science**, volume 235 of Contemporary Mathematics Series, pp. 33-52. American Mathematical Society, 1999.

MORTARI, C. A. **Introdução à Lógica**. São Paulo: Editora Unesp, 2001.

SETTE, A. M., CARNIELLI, W. A. Maximal Weakly-intuicionistic logics, **Studia Logica** 55, 1995, pp. 181-203.

SMULLYAN, R. M. **First-order logic**, New York: Springer-Verlag / Dover Publication, 1968.