Derivações Localmente Nilpotentes

Luiz FIlipe M. S. Oliveira

Universidade Federal de São Paulo - UNIFESP

Introdução

O estudo de derivações e derivações localmente nilpotentes forma um rico e intrincado ramo da Matemática, com uma teoria algébrica bastante ampla e profundas ligações com geometria. Vários problemas históricos podem ser colocados em termos de derivações ou possuem solução através desta teoria, como exemplos temos:

- Se A é uma álgebra finitamente gerada sobre um corpo de característica zero k e B é uma subalgebra de A, então B é algebricamente fechado em A se, e somente se, é o núcleo de uma k-derivação de A;
- Se k é um corpo contido em um anel A, então o conjunto de k-derivações sobre A forma uma álgebra de Lie sobre k.

Tendo em vista tais propriedades, o presente trabalho tem como objetivo apresentar alguns resultados sobre a teoria básica de derivações e de derivações localmente nilpotentes, bem como algumas propriedades algébricas sobre os núcleos de derivações localmente nilpotentes em anéis de polinômios e seus quocientes.

Anéis

Definição: Um anel é um conjunto A com duas operações binárias $+$ (soma) e $\cdot$ (produto) tais que

- $a+(b+c)=(a+b)+c\,,\ \forall a,b,c \in A$;
- $a+b=b+a\,,\ \forall a,b \in A$;
- $\exists 0 \in A$ tal que $0+a=a\,,\ \forall a \in A$;
- $\forall a \in A,\ \exists b \in A$ tal que $a+b=0$;
- $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c\,,\ \forall a,b,c \in A$;
- $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c\,,\ \forall a,b,c \in A$.

Definição: Seja A um anel, dizemos que A é um domínio se é unitário, comutativo e não tem divisores de zero, ou seja,

$$a\cdot b = 0 \iff a=0 \text{ ou } b=0,\ \forall a,b \in A.$$

Seja A um anel, o conjunto de todos os polinômios nas variáveis $x_1,\dots,x_n$, com coeficientes em A, munido de soma e produto usuais de polinômios, forma um anel e é denotado por $A[x_1,...,x_n]$.

Derivações

Definição: Seja A um anel, uma derivação em A é qualquer função $D: A \to A$ que satisfaça

- $D(a+b)=D(a)+D(b)\,,\ \forall a,b \in A$;
- $D(ab)=D(a)b+aD(b)\,,\ \forall a,b \in A$.

Se B é um subanel de A, dizemos que D é uma B-derivação se satisfaz

$$D(b)=0,\ \forall b \in B.$$

Notação:

- $Der(A)$ é o conjunto de todas as derivações em A;
- $Der_B(A)$ é o conjunto de todas B-derivações em A.

Definição: Seja A um anel e $D \in Der(A)$, definimos o anel de nilpotência de D como

$$Nil(D)=\{a \in A\ ;\ D^n(a)=0 \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}.$$

Derivações Localmente Nilpotentes

Definição: Seja A um anel, dizemos que uma derivação $D \in Der(A)$ é localmente nilpotente se $Nil(D)=A$, ou seja, se

$$\forall a \in A,\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } D^n(a)=0.$$

Notação:

- $LND(A)$ é o conjunto de todas as derivações localmente nilpotentes em A;
- Se B é um subanel de A, $LND_B(A)=LND(A)\cap Der_B(A)$.

Definição: Sejam A um anel e $D \in Der(A)$, definimos o núcleo de D como

$$ker(D)=A^D=\{a \in A;\ D(a)=0\}.$$

Propriedades Algébricas Fundamentais

1. Sejam A um domínio e $D \in Der(A)$, então $ker(D)$ é algebricamente fechado em A.

Sejam A e B anéis com $B \subseteq A$, dizemos que um elemento $a \in A$ é transcendente sobre B se não é raiz de nenhum polinômio não nulo com coeficientes em B. Se todo elemento de $A \setminus B$ é transcendente sobre B, dizemos que B é algebricamente fechado em A.

2. Sejam A um domínio de característica zero e $D \in LND(A)$, então $ker(D)$ é fatorialmente fechado em A.

Sejam A e B anéis tais que $B \subseteq A$, dizemos que B é fatorialmente fechado em A se

$$a,b \in A \text{ e } ab \in B \Rightarrow a,b \in B.$$

3. Sejam A um domínio e $D \in LND(A)$, então $tr.deg_{A^D}(A)=1$ e $Frac(A)^D = Frac(A^D)$.

Seja A um domínio, dizemos que A é um corpo se

$$\forall a \in A\setminus\{0\},\ \exists b \in A \text{ tal que } ab=ba=1.$$

Definimos o corpo de frações, $Frac(A)$, de um dominio A como o menor corpo contendo uma cópia de A.

Referências Bibliográficas

[1] Lang, S. Algebra: 3. ed. Springer, 2002.
[2] Daigle, D. Locally Nilpotent Derivations *Lecture notes for the "September School"of Algebraic Geometry*. Lukecin, 2003.
[3] Freudenburg, G. Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations: 2. ed. Springer, 2017.