Matrizes Estocásticas Aleatórias Associadas a Grupos de Lie Clássicos e Espaços Simétricos

Lucas H. Oliveira, Marcel Novaes

Universidade Federal de Uberlândia
Instituto de Física

lucaslhc12@gmail.com

Introdução

O espalhamento de uma onda, por exemplo por uma impureza em uma rede cristalina, é descrito por uma matriz unitária cujos elementos são amplitudes de probabilidade [3]. Associada a ela, podemos definir uma matriz M cujos elementos são probabilidades:

$$M_{ij} = |U_{ij}|^2 .$$

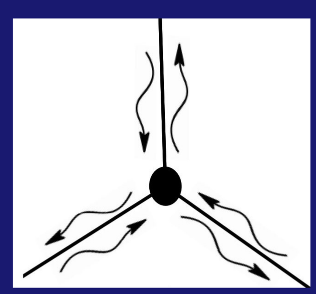

Figura 1: Espalhamento por uma impureza.

A matriz M é estocástica.

Estudamos as propriedades estatísticas do espectro de matrizes estocásticas para as quais a matriz U está uniformemente distribuída em um dos grupos de Lie clássicos ou um espaços simétricos compactos, Tab. 1.

AI	$\mathcal{U}(N)/\mathcal{O}(N)$	*Ensembles* Circulares
AII	$\mathcal{U}(2N)/\mathcal{S}p(2N)$	
$AIII$	$\mathcal{U}(N)/\left(\mathcal{U}(a)\times\mathcal{U}(b)\right)$	*Ensembles* Quirais, com $a+b=N$
BDI	$\mathcal{O}(N)/\left(\mathcal{O}(a)\times\mathcal{O}(b)\right)$	
CII	$\mathcal{S}p(2N)/\left(\mathcal{S}p(2a)\times\mathcal{S}(2b)\right)$	
$DIII$	$\mathcal{O}(2N)/\mathcal{U}(N)$	*Ensembles* de Bogoliubov-de Gennes
CI	$\mathcal{S}p(2N)/\mathcal{U}(N)$	

Tabela 1: Espaços simétricos compactos.

Resultados

Os autovalores das matrizes do ensemble estocástico Σ_Λ são complexos se $\Lambda = \mathcal{U}(N), \mathcal{O}(N), \mathcal{S}p(2N)$ e são reais se Λ for um espaço simétrico. Apesar de os elementos de M não serem independentes, observamos a presença de universalidade.

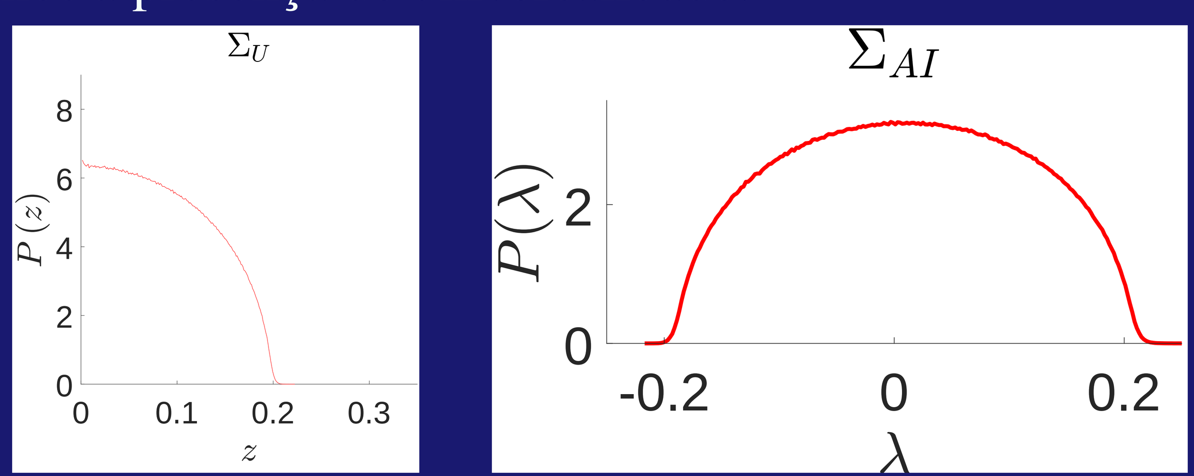

Figura 2: Distribuições de valores singulares em Σ_U (à esquerda) e de autovalores em Σ_{AI} (à direita).

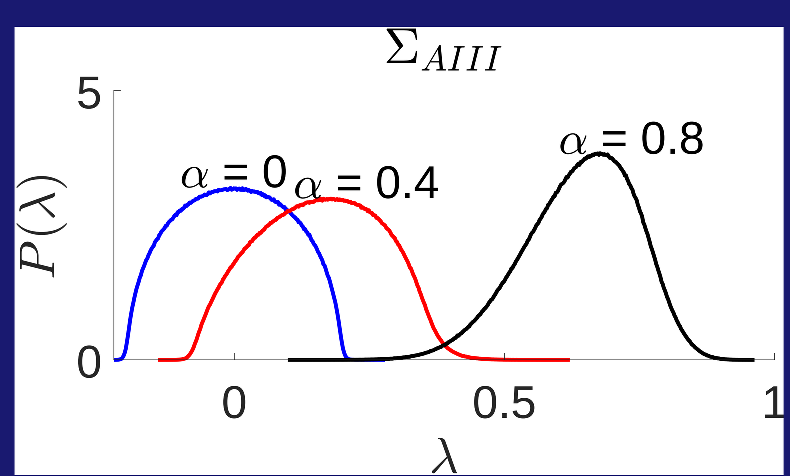

Figura 3: Distribuição de autovalores em Σ_{AIII}, com $\alpha = \frac{a-b}{N}$.

Gostaríamos de provar a universalidade através do método dos momentos. Os momentos da distribuição dos autovalores estão associados à média do traço das potências

$$m_n^G = \left\langle \frac{1}{N}\mathrm{Tr}M^n \right\rangle_G = \int_G \frac{1}{N}\mathrm{Tr}M^n dg. \tag{1}$$

Por exemplo, no espaço simétrico AI, temos

$$\mathrm{Tr}M^n = \sum_{\vec{i}} U_{i_1 i_2} U_{i_2 i_3} \cdots U_{i_n i_1} U^*_{i_1 i_2} U^*_{i_2 i_3} \cdots U^*_{i_n i_1}. \tag{2}$$

Aplicando a média sobre AI, obtemos

$$\langle \mathrm{Tr}M^n \rangle_{\Sigma_{AI}} = \sum_{\vec{i}} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \mathrm{Wg}^{AI}(\sigma, N)\delta_\sigma(\vec{p},\vec{p}), \tag{3}$$

com $\vec{p} = (i_1, i_2, i_2, ..., i_n, i_n, i_1)$ e $\mathrm{Wg}^{AI}(\sigma, N)$ é a função de Weingarten do espaço AI, dada em termos de quantidades que estão relacionadas às representações dos grupos de permutações [1].

O cálculo do momento acima, Eq. 3, envolve encontrar o número de permutações em S_{2n} que têm coset-tipo λ e o grupo gerado por σ e φ_U tem m órbitas, com

$$\varphi_U = (1\ 2n)\,(2\ 3)\ldots(2n-2\ 2n-1)$$

uma permutação que reflete os vínculos na lista $\vec{p}$.

$$m_2^{AI} = \frac{(N-1)(N+5)}{N(N+1)(N+3)} \sim \frac{1}{N} - \frac{8}{N^3},$$
$$m_4^{AI} \sim \frac{2}{N^2} + \frac{4}{N^3}.$$

Assintoticamente, correspondem aos dois primeiros momentos não nulos de uma distribuição semicircular com raio $2/\sqrt{N}$.

Para os outros ensembles estocásticos encontramos diferentes problemas combinatórios, porém de natureza semelhante. No caso dos ensembles estocásticos quirais ($\Sigma_{AIII}, \Sigma_{BDI}$ e Σ_{CII}), aparecem novas distribuições de probabilidade que dependem do parâmetro α. Se $\alpha = 0$, recuperamos a distribuição semicircular.

Conclusão

- Definimos ensembles de matrizes estocásticas associadas aos grupos Unitário, Ortogonal e Simplético e aos espaços simétricos compactos.
- Numericamente, observamos que os ensembles estudados comportam-se como ensembles gaussianos.
- Utilizando o método dos momentos, juntamente com o maquinário das funções de Weingarten, calculamos os primeiros momentos das distribuições. Eles concordam com os resultados numéricos.
- Momentos de ordem mais alta necessitam da solução de problemas de combinatória que envolvem fatoração de permutações.

Referências

[1] Sho Matsumoto. Weingarten calculus for matrix ensembles associated with compact symmetric spaces. *Random Matrices: Theory and Applications*, 2(02):1350001, 2013.

[2] Lucas H Oliveira and Marcel Novaes. Random stochastic matrices from classical compact groups and symmetric spaces. *arXiv preprint arXiv:1807.10240*, 2018.

[3] Gregor Tanner. Spectral statistics for unitary transfer matrices of binary graphs. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33(18):3567, 2000.

Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro na forma de bolsa durante o mestrado.