Códigos perfeitos na métrica de Lee

Lucas Eduardo N. Gonçalves & Grasiele C. Jorge

Instituto de Ciência e Tecnologia - Universidade Federal de São Paulo

{eduardo.lucas, grasiele.jorge}@unifesp.br

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Introdução

Códigos corretores de erros são estruturas matemáticas largamente utilizadas na transmissão de informações por canais hostis, por terem a capacidade de recuperar mensagens danificadas por ruídos. Neste trabalho focamos em códigos perfeitos na métrica de Lee e enunciamos a conjectura de Golomb-Welch, que está em aberto há cerca de 50 anos.

Conceitos Introdutórios

Definição 1. *Um código C é um subconjunto de $\mathbb{Z}^n$ ou $\mathbb{Z}_q^n$. Os elementos de C se chamam palavras do código.*

Definição 2. *Dados $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, a distância de Lee entre x e y é dada por:*

$$d_L(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Definição 3. *Seja $q \geq 2$ um número natural. Dados $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_q^n$, com $\overline{x} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$ e $\overline{y} = (\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n})$ e $0 \leq x_i, y_i \leq q - 1$, para todo i, a distância de Lee entre $\overline{x}$ e $\overline{y}$ é definida como:*

$$d_L(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} \min\{|x_i - y_i|, q - |x_i - y_i|\}.$$

Exemplo 1. *Sejam $\overline{x} = (\overline{1}, \overline{1})$ e $\overline{y} = (\overline{4}, \overline{4}) \in \mathbb{Z}_5^2$. Temos que*
$$d_L(\overline{x}, \overline{y}) = 2 \cdot \min\{|1 - 4|, 5 - |1 - 4|\} = 4.$$

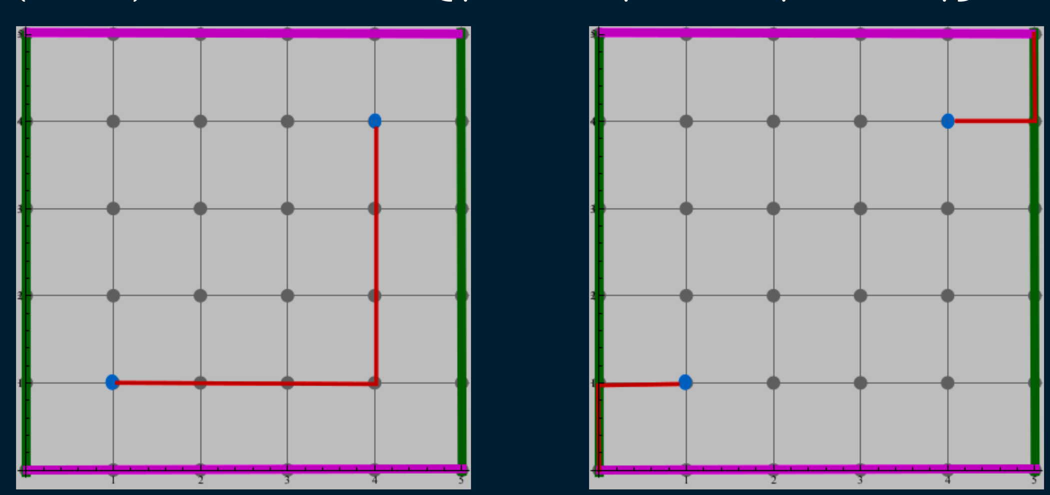

Figura 1: Menor caminho entre os pontos $\overline{x} = (\overline{1}, \overline{1})$ e $\overline{y} = (\overline{4}, \overline{4})$.

Denotaremos por $S_{n,r}$ a esfera de Lee de raio r centrada na origem, ou seja, $S_{n,r} = \{w;\ d_L(0, w) \leq r\}$.

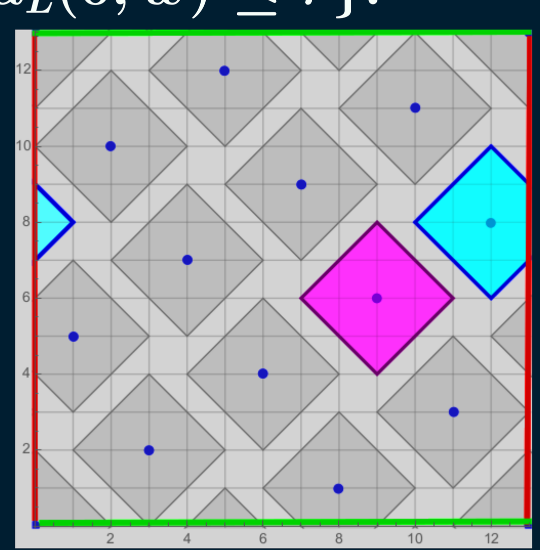

Figura 2: Esferas na métrica de Lee centrada nos pontos do código $C = \langle(\overline{1}, \overline{5})\rangle \subseteq \mathbb{Z}_{13}^2$.

Proposição 1. *Seja $C \subseteq \mathbb{Z}^n$ ou $\mathbb{Z}_q^n$ um código com distância de Lee mínima d. Temos então que as bolas de raio $r = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ centradas em palavras do código não se intersectam, e k é o maior número com essa propriedade.*

Proposição 2. *[3] O número de pontos contidos em uma esfera de Lee $S_{n,r}$ em $\mathbb{Z}^n$ é dado por:*

$$V(n, r) = \sum_{k=0}^{\min\{n,r\}} 2^k \binom{n}{k} \binom{r}{k}.$$

Códigos perfeitos

Definição 4. *Um código C se diz perfeito se cada elemento de $\mathbb{Z}^n$ ou $\mathbb{Z}_q^n$ está contido em exatamente uma esfera de raio r centrada em um elemento de C.*

Teorema 1. *[3] Para todo inteiro positivo r, existe um código perfeito (na métrica de Lee) com capacidade de correção de r erros no conjunto $\mathbb{Z}_q^2$, onde $q = 2r^2 + 2r + 1$.*

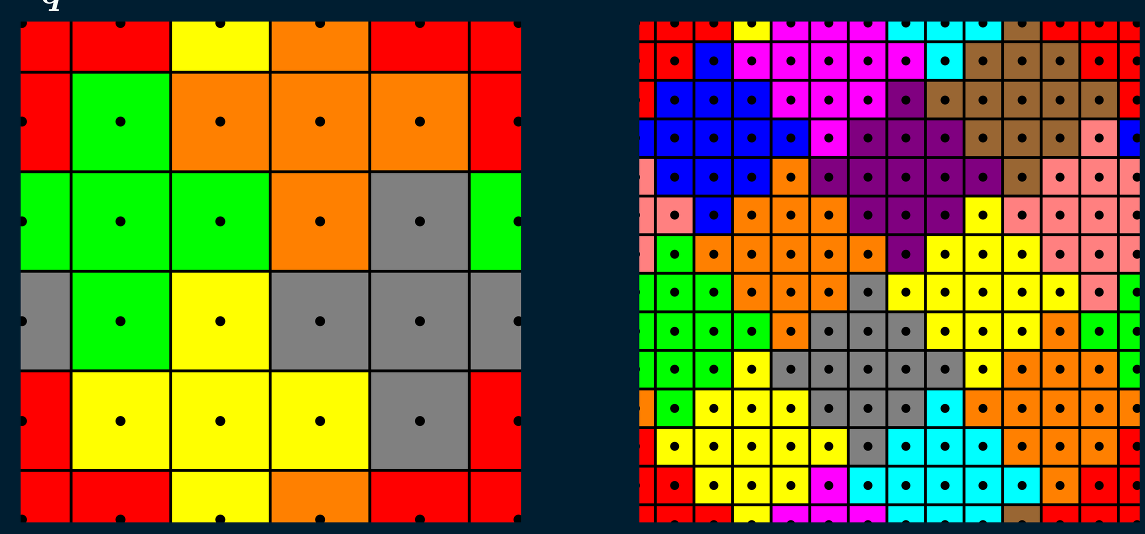

Figura 3: Códigos perfeitos em $\mathbb{Z}_5^2$ e $\mathbb{Z}_{13}^2$

Teorema 2. *[3] As esferas de Lee de raio 1 podem ser usadas para ladrilhar o conjunto $\mathbb{Z}_q^n$, onde $q = 2n + 1$.*

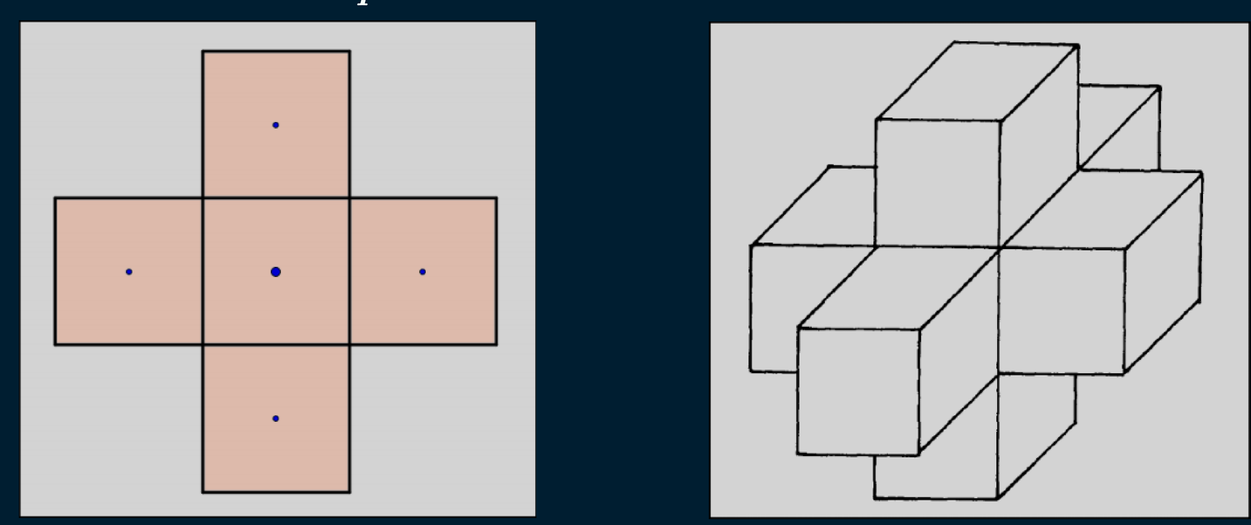

Figura 4: Esfera de Lee de raio 1 na dimensão 2 e Esfera de Lee de raio 1 na dimensão 3

Teorema 3. *[3] A esfera de Lee $S_{3,2}$ associada a Figura 5 (composta por 25 cubos) não ladrilha o conjunto $\mathbb{Z}^3$.*

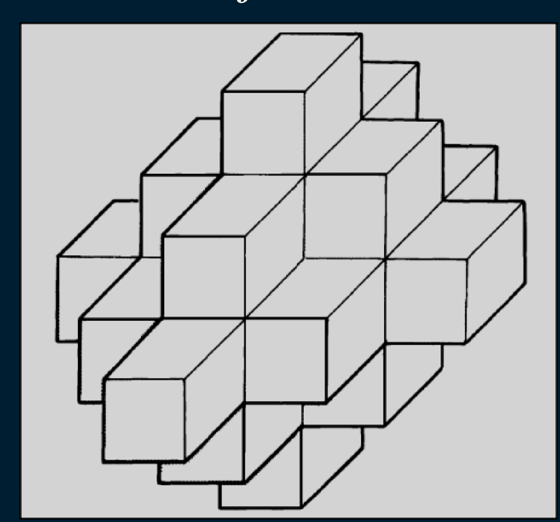

Figura 5: Esfera de Lee de raio 2 na dimensão 3

Conjectura 1. *[3] [Golomb-Welch] As esferas de Lee $S_{n,r}$ não ladrilham perfeitamente o espaço $\mathbb{Z}^n$ para $n \geq 3$ e $r \geq 2$.*

A conjectura já foi demonstrada para alguns casos especiais, por exemplo, $r = 2$ e dimensão $n \leq 12$ [4].

Referências

[1] J. H. Conway e N. J. A. Sloane. *Sphere packings, lattices and groups*. Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1998.

[2] G. A. P. de Moraes. *Códigos Perfeitos na métrica de Lee e a Conjectura de Golomb-Welch*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Paulo, 2017.

[3] S. W. Golomb e L. R. Welch. Perfect codes in the Lee metric and the packing of polyominoes. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 18(2):302–317, 1970.

[4] P. Horak e D. Kim. 50 years of the Golomb-Welch conjecture. *IEEE Transactions on Information Theory*, 64(4):3048–3061, April 2018.

Agradecimentos

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

UNIFESP 25 ANOS
Universidade pública, conhecimento público