Problemas Multiobjetivo com Restrições

Lizet Santa Cruz Calderón[1]& José Mario Martínez[1] & Maria Aparecida Diniz-Ehrhardt[1]

Unicamp[1]

lizet1910@gmail.com

impa
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Introdução

Em otimização multiobjetivo, mais de uma função e minimizada simultaneamente. Normalmente, quase nunca ha um minimizador para todas as funções. Neste trabalho apresentamos um método de regularização de ordem p para encontrar pontos estacionarios de problemas multiobjetivos com restrições, sob a condição de Hölder continuidade nas derivadas da função objetivo. As restrições a considerar, devem ser bastante simples. Dado uma iteração x^k nosso método minimiza um modelo do problema original mais um termo de regularização sujeito as restrições. O método apresentado neste trabalho considera modelos (não necessariamente Taylor) de ordem arbitrária, e usamos um criterio de descida para todas as funções objetivas.

Objetivos

Nosso objetivo e calcular o número de iterações necessárias para calcular o ponto estacionário aproximado de uma função vetorial em termos de complexidade.

Otimização Multiobjetivo

Definamos o seguinte problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & F(x) \\ \text{sujeita a } & h_E(x) = 0, \\ & h_I(x) \le 0, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Defina como $F(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$, onde $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, são funções cuja p-ésima derivada são Hölder contínuas $\forall i = 1, ..., m$, assumiremos que $p \in \{1, 2, 3, ...\}$, $L > 0, \delta > 0$ e $\beta \in (0, 1]$, com $p + \beta > 1$. Sejam $h_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$, $h_I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, restrições fáceis. Para todo $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, ..., r\}$, definamos $M^i_{\overline{x}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (pretende ser um "modelo"de $f_i(x)$ em torno de $\overline{x}$) como o polinômio de Taylor de ordem p suponhamos que as derivadas de $M^i_{\overline{x}}$ existem para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Do problema inicial temos que x e $\overline{x}$ cumprem as seguintes condições:

$$M^i_{\overline{x}}(x) + \sigma ||x - \overline{x}||^{p+1} \le f_i(\overline{x}) \tag{2}$$

$$||(p + 1)\sigma||x - \overline{x}||^{p+1} + \nabla M^i_{\overline{x}}(x)^T\gamma + \nabla h_E(x)^T\lambda + \nabla h_I(x)^T\mu|| \le \tag{3}$$

$$\theta||x - \overline{x}||^p \tag{4}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}^s, \mu \in \mathbb{R}^q_+, \gamma \in \mathbb{R}^m_+, ||\gamma||_1 = 1, \tag{5}$$

$$|| \min\{\mu, -h_I(x)\}|| \le \delta, ||h_E(x)|| \le \delta, ||h_I(x)_+|| \le \delta, \tag{6}$$

Algoritmo 1: Assuma que $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0, 1)$, $\epsilon \in (0, 1)$, $\delta > 0$, $f_{target} \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$ e $\sigma_{min} > 0$. Inicialize $k \leftarrow 0$, $\sigma_0 = \sigma_{min}$.

Passo 1: Defina $\sigma \leftarrow \sigma_k$.

Passo 2: Encontre $x \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}^m_+$, $||\gamma||_1 = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}^s$, $\mu \in \mathbb{R}^q_+$, tal que cumpram as condições acima

Passo 3: Se $|| \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \nabla f_i(x^{trial}) + \nabla h_E(x^{trial})^T\lambda + \nabla h_I(x)^T\mu|| \le \epsilon$ ou $f_i(x^{trial}) \le f_{target}$, para todo $i = 1, ..., m$ pare.

Passo 4: Se a condição de decréscimo suficiente

$$f_i(x^{trial}) \le f_i(x^k) - \frac{\sigma\epsilon^{\frac{p+1}{p}}}{2^{\frac{p+1}{p}}(p + 2)^{\frac{p+1}{p}}\sigma^{\frac{1}{p}}} \tag{7}$$

não se cumpre para algum i, faça $\sigma \leftarrow 2\sigma$, e volte para o passo 2. Caso contrário va para o passo 5.

Passo 5: Defina $x^{k+1} = x^{trial}$, $k \leftarrow k + 1$, $\sigma_k = \sigma$, e v ao Passo 1.

Teorema 1: Suponha que as condições acima cumprem para $\overline{x} = x^k$ em todos os pontos do teste x e calculados a cada iteração k executada pelo Algoritmo !. Então depois de no máximo

$$(f_i(x^0) - f_{target})\frac{\epsilon^{\frac{-p+\beta}{p+\beta-1}}}{\alpha c_p}, \text{ para cada } i = 1, ..., m$$

iterações o Algoritmo 1 calcula $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^m_+$, $\gamma \in \mathbb{R}^m_+$, $||\gamma||_1 = 1$, que verifica $f_i(x) \le f_target$ ou

$$|| \sum_i = 1^m\gamma_i\nabla f_i(x) + h'_E(x)^T\lambda + h'_I(x)^T\mu|| \le \epsilon$$

$||h_E(x)|| \le \delta$, $||h_I(x)_+|| \le \delta$ e $|| \min\{\mu, -h_I(x)\}|| \le \delta$, onde

$$c_p = \min\left\{\frac{1}{[2(p+2)]^{\frac{p+1}{p}}}\frac{1}{2\theta}, \frac{1}{[2(p+2)]^{\frac{p+1}{p}}\left\{2\max\left\{\frac{2^{\frac{-\beta+1}{p+\beta-1}}L^{\frac{p}{p+\beta-1}}}{p+2}, \frac{L^{\frac{p}{p+\beta-1}}}{(1-\alpha)^{\frac{p}{p+\beta-1}}(2p+4)^{\frac{\beta-1}{p+\beta-1}}}\right\}\right\}^{\frac{1}{p}}}\right\} \tag{8}$$

Resultados

Com os resultados obtidos para funções multiobjetivos com restrições conclui-se que em termos de complexidade que o numero de iterações necessarias para calcular o ponto estacionário aproximado é:

$$(f_i(x^0) - f_{target})\frac{\epsilon^{\frac{-p+\beta}{p+\beta-1}}}{\alpha c_p} + \max\left\{\log_2(\theta), \frac{1-\beta}{p+\beta-1}\log_2(\epsilon^{-1}) + c_l\right\} - \mathrm{log}$$

Conclusão

No Teorema 1, o caso definido por $p = 1$ e $\beta 0$ e o pior possível em termos de redução do valor da função objetivo em cada iteração, sendo a pior redução esperada $\alpha c_p \epsilon^{1+1/\beta}$ pois, para $\epsilon < 1$, a redução vai para zero quando $\beta \approx 0$, implicando assim em um grande número de iterações para atingir o criterio de parada.

Referências

[1] J. M. Martínez (2017), *On High-order Model Regularization for Constrained Optimization*, SIAM Journal on Optimization, **27**4,2447-2458.

[2] A. L. Custódio, J. F. A. Madeira, A. I. F. Vaz, and L. N. Vicente (2011)*Direct Multisearch for Multiobjective Optimization*, SIAM Journal on Optimization, **21**3,1109-1140.

[3] L.M.Graña Drummond and.F.Svaiter(2005), *A steepest descent method for vector optimization*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **175**2,395-414.

Agradecimentos

Agradeço à CNPq pela bolsa de doutorado.